Fondements de l'Analyse Économique
Travaux Dirigés 2010-2011
Interrogation écrite N°3
Corrigé

Cécile Martin & Marc Sangnier

14 décembre 2010

Exercice 1

On se place dans le cadre IS-LM suivant :

– la relation IS est donnée par :

$$Y = C(Y - T, i) + I(Y, i) + G$$

où $C(.)$ est la consommation, Y le revenu courant, T le montant de l'impôt, $I(.)$ l'investissement, i le taux d'intérêt, G la dépense publique ;

– la relation LM est donnée par :

$$\frac{M}{p} = L(Y, i)$$

avec $\frac{M}{p}$ l'offre d'encaisses réelles et $L(.)$ la demande de monnaie dans l'économie.

Question 1 Que représentent les courbes IS et LM ? Donnez une définition. Quelles sont les variables endogènes du modèle ? A l'aide des théories du choix intertemporel, discutez du signe de la dérivée partielle C'_i. On suppose $I'_Y > 0$. Comment interprétez-vous ce signe positif ? 2 points

On supposera par la suite que $C'_i < 0$, $C'_Y > 0$, $I'_i < 0$, $L'_i < 0$ et $L'_Y > 0$ et que $1 - C'_Y - I'_Y > 0$.

– *Les variables endogènes du modèle IS-LM sont le revenu courant Y et le taux d'intérêt i. La courbe IS représente l'ensemble des couples de variables endogènes (Y, i) qui permettent d'équilibrer le marché des biens/services. La courbe LM représente l'ensemble des couples de variables endogènes (Y, i) qui permettent d'équilibrer le marché de la monnaie.*

- *Une hausse du taux d'intérêt va diminuer la consommation agrégée de l'économie. Explication : on écrit l'équation de Slutsky dans le cas d'une économie avec dotations pour la demande marshalienne d'un bien x_i en fonction du prix du bien p_i :*

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{\partial h_i}{\partial p_i} + \frac{y_i - x_i}{p_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_i}$$

$$\text{Effet Total} = \text{Effet Substtution} + \text{Effet revenu}$$

avec h_i la demande hisckienne du bien i, y_i la dotation initiale en bien i. Si $y_i - x_i < 0$ (individu demandeur net du bien), puisque $ES < 0$ et $\frac{\partial x_i}{\partial y_i} > 0$ dans le cas d'un bien normal, on a alors $ET < 0$.
En transposant cette équation dans un modèle de choix intertemporel de consommation, avec $x_i = C$ et $p_i = i$, on en déduit que, dans le cas d'une hausse de i, un agent emprunteur diminuera sa consommation courante. Si l'individu est prêteur la conclusion est indéterminée.
Si l'on raisonne désormais au niveau agrégé, la demande nette agrégée d'une économie est nulle, on a alors $ER = 0$ et $ET = ES < 0$.
- $I'_Y > 0$ *: Avant d'investir, une entreprise compare l'efficacité marginal du capital (EMC, les rendements attendus du capital) et son coût (i). Si $i > EMC$, l'entreprise investira. Or, une hausse du revenu courant se traduit par une hausse anticipée des débouchés pour les biens produits par les entreprises. Ceci élève l'EMC, ce qui, à taux d'intérêt constant, motive l'investissement.*

Question 2 Dans un plan $(0, Y, i)$, représentez les courbes IS et LM, en justifiant les signes de leur pente. 1 point

En différenciant IS et LM, on obtient :

$$dY = C'_Y dY - C'_Y dT + C'_i di + I'_Y dY + I'_i di + dG$$

$$dM = L'_Y dY + L'_i di$$

Les pentes des courbes IS et LM ne sont pas déterminées par les variables exogènes du modèle. On pose $dM = dT = dG = 0$. Il vient alors :

$$dY(1 - C'_Y - I'_Y) = di(C'_i + I'_i)$$

$$\left.\frac{di}{dY}\right|_{IS} = \frac{(1 - C'_Y - I'_Y)}{(C'_i + I'_i)} < 0$$

La courbe IS est donc décroissante dans le plan (O,Y,i).
Et

$$0 = L'_Y dY + L'_i di$$

$$\left.\frac{di}{dY}\right|_{LM} = \frac{-L'_Y}{L'_i} > 0$$

La courbe LM est donc croissante.

Question 3 Le gouvernement souhaite conduire une politique de relance. Il a ici le choix entre trois actions différentes : 4,5 points

1. Une politique budgétaire financée par emprunt ;
2. Une politique budgétaire financée par l'impôt ;
3. Une politique budgétaire financée par création monétaire.

Dans chaque cas : détaillez brièvement les différentes étapes par lesquelles la politique va modifier les variables endogènes ; calculez l'effet sur le revenu (multiplicateur des dépenses publiques). Comparez les différents effets.
Dans le cas du financement des dépenses publiques par l'impôt, SANS CALCULS, à quoi aurait été égal le multiplicateur si on avait eu comme hypothèse $I(Y-T,i)$ et $L(Y-T,i)$, i.e. si l'investissement et la demande de monnaie de transaction avaient été des fonctions du revenu disponible et non du courant ?

1. *Politique budgétaire financée par emprunt :*

$$\Delta^+G \rightarrow \Delta^+Y^D \rightarrow \Delta^+Y^S \rightarrow \Delta^+Y^{eq} \rightarrow \Delta^+C, I$$

mais

$$\Delta^+Y^{eq} \rightarrow \Delta^+L_T^D \rightarrow \Delta^+i \rightarrow \Delta^-L_S^D, C, I$$

avec Y^D la demande de biens, Y^S l'offre, Y^{eq} le revenu d'équilibre de l'économie, L_T^D la demande de monnaie de transaction, L_S^D la demande de monnaie pour motif de spéculation.
Pour calculer l'effet multiplicateur d'une hausse de G, on reprend les équations différenciées de IS et de LM, et on résout le système suivant :

$$\begin{cases} dY = C'_Y dY - C'_Y dT + C'_i di + I'_Y dY + I'_i di + dG \\ dM = L'_Y dY + L'_i di \end{cases}$$

$$\iff dY(1 - C'_Y - I'_Y) = -C'_Y dT + (C'_i + I'_i)\left(\frac{dM}{L'_i} - \frac{L'_Y dY}{L'_i}\right) + dG$$

$$\iff dY = \frac{-C'_Y dT + dM\left(\frac{C'_i+I'_i}{L'_i}\right) + dG}{1 - C'_Y - I'_Y + \left(\frac{C'_i+I'_i}{L'_i}\right)L'_Y}$$

Pour un financement par emprunt, on pose $dM = dT = 0$, il vient alors :

$$\left.\frac{dY}{dG}\right|_{dM=dT=0} = \frac{1}{1 - C'_Y - I'_Y + \left(\frac{C'_i+I'_i}{L'_i}\right)L'_Y}$$

2. *Politique budgétaire financée par l'impôt :*

$$\Delta^+ G \rightarrow \Delta^+ Y^D \rightarrow \Delta^+ Y^S \rightarrow \Delta^+ Y^{eq} \rightarrow \Delta^+ C, I$$

mais

$$\Delta^+ Y^{eq} \rightarrow \Delta^+ L_T^D \rightarrow \Delta^+ i \rightarrow \Delta^- L_S^D, C, I$$

et

$$\Delta^+ G \rightarrow \Delta^+ T \rightarrow \Delta^- Y^D \rightarrow \Delta^- Y^S \rightarrow \Delta^- Y^{eq} \rightarrow \Delta^- C, I$$

Pour un financement par impôt, on pose $dM = 0$ et $dG = dT$, il vient alors :

$$\left.\frac{dY}{dG}\right|_{dG=dT} = \frac{1 - C'_Y}{1 - C'_Y - I'_Y + (\frac{C'_i + I'_i}{L'_i})L'_Y} < \left.\frac{dY}{dG}\right|_{dM=dT=0}$$

Si la demande de monnaie de transaction et l'investissement avaient été fonctions du revenu disponible (Y-T), et non du revenu courant (Y), nous aurions obtenu un multiplicateur des dépenses publiques égal à 1 (théorème de Haavelmo, 1945).

3. *Politique budgétaire financée par emprunt et accompagnée d'une politique monétaire :*

$$\Delta^+ G \rightarrow \Delta^+ Y^D \rightarrow \Delta^+ Y^S \rightarrow \Delta^+ Y^{eq} \rightarrow \Delta^+ C, I$$

et

$$\Delta^+ Y^{eq} \rightarrow \Delta^+ L_T^D \rightarrow \Delta^+ M^S$$

avec M^S l'offre de monnaie (qui empêche la hausse du taux d'intérêt, l'effet d'éviction est réduit voire nul ici). Pour un financement par création monétaire, on pose $dM = dG$ et $dT = 0$, il vient alors :

$$\left.\frac{dY}{dG}\right|_{dG=dM} = \frac{1 + (\frac{C'_i + I'_i}{L'_i})}{1 - C'_Y - I'_Y + (\frac{C'_i + I'_i}{L'_i})L'_Y} > \left.\frac{dY}{dG}\right|_{dM=dT=0}$$

En conclusion, on a :

$$\left.\frac{dY}{dG}\right|_{dG=dM} > \left.\frac{dY}{dG}\right|_{dM=dT=0} > \left.\frac{dY}{dG}\right|_{dG=dT}$$

Question 4 On suppose que le gouvernement préfère finalement effectuer une politique monétaire (Open-Market) de relance. Comme pour la question 3, détaillez le processus par lequel la politique monétaire va modifier les variables 1,5 point endogènes. Calculez l'effet sur le revenu de cette politique.

$$\Delta^+ M^S \rightarrow \Delta^- i \rightarrow \Delta^+ C, I \rightarrow \Delta^+ Y^D \rightarrow \Delta^+ Y^S \rightarrow \Delta^+ Y^{eq}$$

et

$$\Delta^- i \rightarrow \Delta^+ L_S^D$$

Pour une politique monétaire, on pose $dG = dT = 0$, il vient alors :

$$\left.\frac{dY}{dM}\right|_{dG=dT=0} = \frac{1}{(1 - C'_Y - I'_Y)(\frac{L'_i}{C'_i + I'_i}) + L'_Y}$$

Question 5 On suppose désormais que $|L'_i| \rightarrow \infty$. Interprétez cette situation. En vous appuyant sur un raisonnement graphique et en reprenant le processus détaillé des effets d'une politique budgétaire et monétaire (question 3 et 4), SANS PASSER PAR LE CALCUL DES EFFETS MULTIPLICATEURS, que pouvez-vous dire quant aux effets d'une politique budgétaire de relance financée par emprunt et d'une politique monétaire. 1,5 point

Si $|L'_i| \rightarrow \infty$, cela signifie qu'une infime variation du taux d'intérêt engendre une grande variation de la demande de monnaie de spéculation. La demande de monnaie de spéculation est parfaitement élastique au taux d'intérêt. Il s'agit d'une "trappe à liquidités".
Dans cette situation, une politique budgétaire de relance sera parfaitement efficace, puisque l'effet d'éviction sera nul. Le niveau des encaisses spéculatives est tel que les agents acceptent de les diminuer pour financer les transactions supplémentaires, sans qu'il n'y ait de hausse du taux d'intérêt qui déprimerait l'investissement et la consommation.
Une politique monétaire de relance en revanche serait totalement inefficace, puisque une hausse des encaisses monétaires engendreraient une hausse de la demande d'encaisses spéculatives, sans que le taux d'intérêt n'augmente beaucoup.
Graphiquement, la courbe LM est plate. On est dans un cas typiquement "keynésien", selon l'étude de Hicks.

Question 6 Même question si $|C'_i + I'_i| \rightarrow \infty$. 1,5 point

Si $|C'_i + I'_i| \rightarrow \infty$, la consommation et l'investissement sont surtout déterminés par le taux d'intérêt (cas typiquement "classique" de Hicks).
Une politique budgétaire de relance est alors inefficace puisque la hausse du

taux d'intérêt due à la hausse de la demande de monnaie de transaction engendre un effet d'éviction très important.
Une politique monétaire de relance est alors pleinement efficace, puisque la réaction de la demande effective (consommation+investissement) à une baisse du taux d'intérêt sera d'une ampleur très importante.
Graphiquement, la courbe IS est horizontale.

Exercice 2

Soit un consommateur qui chercher à maximiser son utilité au cours de son cycle de vie :

$$\int_0^T U_t e^{-\theta t} dt.$$

Le consommateur peut consommer deux biens. Son utilité à l'instant t est donnée par la fonction suivante :

$$U_t = ln\left(c_t\right) + \gamma ln\left(f_t\right).$$

Le prix du bien c est normalisé à 1, le prix du bien f est noté p. Les prix ne varient pas au cours du temps.A chaque instant t, le consommateur reçoit un revenu w_t. On note a_t sa richesse à l'instant t. Le consommateur a accès au marché du crédit et peut donc placer ou emprunter au taux r constant au cours du temps. Sa richesse initiale est $a_0 > 0$. Enfin, il n'existe aucun motif d'héritage, de telle sorte que $a_T = 0$.

Question 1 Exprimez la loi d'évolution de la richesse du consommateur à chaque instant du temps. 0,5 point

La richesse évolue simplement selon la règle suivante :

$$\dot{a}_t = w_t + ra_t - c_t - pf_t$$

Question 2 Donnez le programme du consommateur. Quelles sont les variables de contrôle ? Quelle est la variable d'état ? 1 point

Le programme du consommateur est :

$$max_{c_t, f_t} \int_0^T U_t e^{-\theta t} dt$$
$$sc \dot{a}_t = w_t + ra_t - c_t - pf_t$$

Les variables de contrôle sont c_t et f_t. La variable d'état est a_t.

Question 3 Donnez le Hamiltonien correspondant à ce programme ainsi que les conditions du premier ordre. 1,5 point

Le Hamiltonien de ce programme s'écrit :

$$\mathcal{H} = \{ln(c_t) + \gamma ln(f_t)\} e^{-\theta t} + \lambda_t \{w_t + ra_t - c_t - pf_t\}$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0 &\Longleftrightarrow \frac{1}{c_t} e^{-\theta t} = \lambda_t \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_t} = 0 &\Longleftrightarrow \frac{\gamma}{f_t} e^{-\theta t} = p\lambda_t \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = -\dot{\lambda}_t &\Longleftrightarrow r\lambda_t = -\dot{\lambda}_t \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = \dot{a}_t &\Longleftrightarrow \dot{a}_t = w_t + ra_t - c_t - pf_t
\end{aligned}$$

Question 4 Que peut-on dire du rapport entre c_t et f_t à chaque instant ? 1 point

Les deux premières conditions du premier ordre permettent d'écrire :

$$\frac{\gamma}{f_t} e^{-\theta t} = p\frac{1}{c_t} e^{-\theta t} \Longleftrightarrow \frac{f_t}{c_t} = \frac{\gamma}{p}$$

Le rapport entre f_t et c_t est donc constant à chaque instant. On peut en déduire $f_t = \frac{\gamma}{p} c_t$.

Question 5 Donnez les taux de croissance pour la consommation des deux biens. 1 point

La troisième condition du premier ordre permet d'écrire :

$$\lambda_t = \delta e^{-rt},$$

avec δ une constante. On peut donc en déduire

$$\frac{1}{c_t} e^{-\theta t} = \delta e^{-rt} \Longleftrightarrow c_t = \delta e^{(r-\theta)t}$$

En dérivant par rapport au temps, on montre facilement que le taux de croissance de la consommation du bien c est $r-\theta$. En raisonnant de façon similaire ou en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve que le taux de croissance de la consommation du bien f est également $r-\theta$.

Question 6 Donnez l'expression des consommations des deux biens en fonction du temps. 3 points

A partir des résultats des deux questions précédents, on peut déduire :

$$c_t = c_0 e^{(r-\theta)t} \quad \text{et} \quad f_t = f_0 e^{(r-\theta)t}.$$

Comme $f_t = \frac{\gamma}{p} c_t$, on peut réécrire la dernière condition du première ordre comme :

$$\begin{aligned} \dot{a}_t &= w_t + r a_t - c_t (1+\gamma) \\ \iff e^{-rt}\dot{a}_t &= \left[w_t + r a_t - c_t (1+\gamma)\right] e^{-rt} \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et T, puis en intégrant par parties à gauche, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-rt}\dot{a}_t dt &= \int_0^T \left[w_t + r a_t - c_t (1+\gamma)\right] e^{-rt} dt \\ \iff \left[a_t e^{-rt}\right]_0^T - \int_0^T -r e^{-rt} a_t dt &= \int_0^T r e^{-rt} a_t dt + \int_0^T w_t e^{-rt} dt - (1+\gamma) \int_0^T c_t e^{-rt} dt \\ \iff -a_0 &= \int_0^T w_t e^{-rt} dt - (1+\gamma) \int_0^T c_t e^{-rt} dt \\ \iff c_0 (1+\gamma) \int_0^T e^{(r-\theta)t} e^{-rt} dt &= \int_0^T w_t e^{-rt} dt + a_0 \\ \iff c_0 \frac{(1+\gamma)}{\theta}\left(1 - e^{-\theta T}\right) &= \int_0^T w_t e^{-rt} dt + a_0 \\ \iff c_0 &= \frac{\int_0^T w_t e^{-rt} dt + a_0}{(1-e^{-\theta T})} \frac{\theta}{(1+\gamma)} \end{aligned}$$

On peut donc en déduire :

$$c_t = \frac{\int_0^T w_t e^{-rt} dt + a_0}{(1-e^{-\theta T})} \frac{\theta}{(1+\gamma)} e^{(r-\theta)t}$$

et

$$f_t = \frac{\gamma}{p} \frac{\int_0^T w_t e^{-rt} dt + a_0}{(1-e^{-\theta T})} \frac{\theta}{(1+\gamma)} e^{(r-\theta)t}$$