Statistiques appliquées - L3 d'Economie
Interrogation écrite courte N°2 - Groupe 9 - Corrigé

Marc SANGNIER - marc.sangnier@ens-cachan.fr

6 décembre 2007

Exercice 1

Soit une variable aléatoire continue X qui suit une loi Uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
Sa densité est donc : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a;b]$, $f(x) = 0$ sinon.

Question 1 - Fonction de répartition

La fonction de répartition est :
$F(x) = 0$ si $x < a$
$F(x) = 1$ si $x > b$
$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \left[\frac{1}{b-a}t\right]_a^x = \frac{1}{b-a}(x-a) = \frac{x-a}{b-a}$ si $x \in [a;b]$

Question 2 - Espérance

L'espérance est :
$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x * f(x)dx + \int_a^b x * f(x)dx + \int_b^{+\infty} x * f(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}(\frac{b^2-a^2}{2}) = \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b+a}{2}$

Exercice 2

On dispose d'un échantillon $(x_1;x_2;...;x_n)$ de n observations d'une variable aléatoire réelle X. On considère ces observations comme indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson, donc $\forall i = 1,...n : X_i \rightarrow P(\lambda) \Longleftrightarrow P(X_i = x) = exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!}$. Vous allez estimer le paramètre λ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Question 1 - Fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance est :

$$L(x_1;x_2;...;x_n;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} exp(-\lambda)\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

Question 2 - Méthode du maximum de vraisemblance

L'idée de la méthode du maximum de vraisemblance est que l'échantillon observé est l'ensemble des réalisations qui avaient le plus de chance de se produire. La fonction de vraisemblance représente la probabilité d'obsrever ces réalisation. On va donc chercher le paramètre qui maximise cette probabilité.

Question 3 - Hypothèse

L'hypothèse qui permet d'utiliser la méthode du maximum de vraisemblance est celle de l'indépendance des observations.

Question 4 - Fonction de log-vraisemblance

La fonction de log-vraisemblance est :

$$ln[L(.)] = ln[\prod_{i=1}^{n} exp(-\lambda)\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} ln(exp(-\lambda)) + \sum_{i=1}^{n} ln(\lambda^{x_i}) - \sum_{i=1}^{n} ln(x_i!) = \sum_{i=1}^{n} -\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i ln(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} ln(x_i!) = -n\lambda + ln(\lambda)\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} ln(x_i!)$$

Question 5 - Estimation de λ

Dérivons la fonction de log-vraismblance par rapport à λ :

$$\frac{\partial ln[L(.)]}{\partial \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Supposons les conditions du second ordre vérifiées, la condition du premier ordre s'écrit :

$$\frac{\partial ln[L(.)]}{\partial \lambda} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = n$$

On en déduit :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Question 6 - Estimateur sans biais

$\hat{\lambda}$ est un estimateur sans biais de λ si et seulement si $E(\hat{\lambda}) = \lambda$

$$E(\hat{\lambda}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda$$