

Statistiques appliquées - L3 d'Economie

Interrogation écrite courte N°2 - Groupe 9

Marc SANGNIER - marc.sangnier@ens-cachan.fr

Vendredi 07 décembre 2007

Durée : 0h20

Exercice 1

Soit une variable aléatoire continue X qui suit une loi Uniforme sur l'intervalle $[a; b]$. Sa densité est donc : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a; b]$, $f(x) = 0$ sinon.

Question 1 - Fonction de répartition

Donnez la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

Question 2 - Espérance

Calculez l'espérance de la variable aléatoire X .

Exercice 2

On dispose d'un échantillon $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ de n observations d'une variable aléatoire réelle X . On considère ces observations comme indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson, donc $\forall i = 1, \dots, n : X_i \rightarrow P(\lambda) \iff P(X_i = x) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^x}{x!}$. Vous allez estimer le paramètre λ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Question 1 - Fonction de vraisemblance

Ecrivez la fonction de vraisemblance $L(\cdot)$ de l'échantillon $(x_1; x_2; \dots; x_n)$. Faites clairement apparaître les paramètres de cette fonction.

Question 2 - Méthode du maximum de vraisemblance

Expliquez pourquoi la méthode du maximum de vraisemblance conduit à maximiser la fonction de vraisemblance (quelle est l'idée sous-jacente?).

Question 3 - Hypothèse

Quelle est l'hypothèse faite dans l'énoncé qui vous permet d'utiliser la méthode du maximum de vraisemblance?

Question 4 - Fonction de log-vraisemblance

Ecrivez la fonction de log-vraisemblance $\ln[L(\cdot)]$ de l'échantillon.

Question 5 - Estimation de λ

Déterminez un estimateur $\hat{\lambda}$ de λ en utilisant les questions précédentes.

Question 6 - Estimateur sans biais

Montrez que votre estimateur $\hat{\lambda}$ est un estimateur sans biais de λ .