Statistiques appliquées - L3 d'Economie
Interrogation écrite courte N°2 - Groupe 12

Marc SANGNIER - marc.sangnier@ens-cachan.fr

Vendredi 07 décembre 2007

Durée : 0h20

Exercice 1

Soit une variable aléatoire continue X qui suit une loi Uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
Sa fonction de répartition est donc : $F(x) = 0$ si $x < a$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ si $x \in [a;b]$, $F(x) = 1$ si $x > b$.

Question 1 - Densité de fréquence

Donnez la fonction densité de la variable aléatoire X.

Question 2 - Intervalle

Soit deux réels x_1 et x_2 tels que $a < x_1 < b$ et $x_1 < x_2$. Quelle est la probabilité que X appartienne à $[x_1;x_2]$?

Exercice 2

On dispose d'un échantillon $(x_1;x_2;...;x_n)$ de n observations d'une variable aléatoire réelle X. On considère ces observations comme indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que la variable aléatoire X suit une loi Exponentielle de paramètre θ, sa densité est donc : $f(x) = \theta exp(-\theta x)$,$\forall x > 0$. Vous allez estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Question 1 - Fonction de vraisemblance

Ecrivez la fonction de vraisemblance $L(.)$ de l'échantillon $(x_1;x_2;...;x_n)$. Faites clairement apparaître les paramètres de cette fonction.

Question 2 - Méthode du maximum de vraisemblance

Expliquez pourquoi la méthode du maximum de vraisemblance conduit à maximiser la fonction de vraisemblance (quelle est l'idée sous-jacente ?).

Question 3 - Hypothèse

Quelle est l'hypothèse faite dans l'énoncé qui vous permet d'utiliser la méthode du maximum de vraisemblance ?

Question 4 - Fonction de log-vraisemblance

Ecrivez la fonction de log-vraisemblance $ln[L(.)]$ de l'échantillon.

Question 5 - Estimation de θ

Déterminez un estimateur $\hat{\theta}$ de θ en utilisant les questions précédentes.

Question 6 - Estimateur sans biais

Sachant que l'espérance d'une loi Exponentielle de paramètre β est $\frac{1}{\beta}$, montrez que votre estimateur $\hat{\theta}$ est un estimateur sans biais de θ.