Statistiques appliquées - L3 d'Economie
Interrogation écrite courte N°1 - Groupe 12 - Corrigé

Marc SANGNIER - marc.sangnier@ens-cachan.fr

Jeudi 22 novembre 2007

Exercice 1

Question 1 - Loi jointe du couple

On sait que $P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P(Y=y_j \cap X=x_i)}{P(X=x_i)} \Longleftrightarrow P(Y = y_j \cap X = x_i) = P(Y = y_j \mid X = x_i) * P(X = x_i)$
La loi jointe du couple est donc donnée par le tableau suivant :

$P(X = x_i \cap Y = y_j)$	$x_i = 0$	$x_i = 1$	$x_i = 2$
$y_j = 3$	0,1	0,1	0,0
$y_j = 4$	0,1	0,3	0,4

Exemple de calcul : $P(Y = 4 \cap X = 1) = P(Y = 4 \mid X = 1) * P(X = 1) = 0,75 * 0,4 = 0,3$

Question 2 - Loi conditionnelle de X

La formule utilisée est $P(X = x_i \mid Y = 3) = \frac{P(X=x_i \cap Y=3)}{P(Y=3)}$
On sait que $P(Y = 3) = \sum_{i=0}^{2} P(X = x_i \cap Y = 3) = 0,1 + 0,1 + 0,0 = 0,2$
La loi conditionnelle de X sachant $Y = 3$ est donc donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i \mid Y = 3)$	0,5	0,5	0,0

Question 3 - Covariance

$cov(X;Y) = 0,14 \Rightarrow cov(X;Y) \neq 0$. On peut donc en conclure que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Question 4 - Covariance (bis)

Si $cov(X;Y) = 0$, alors on ne peut rien conclure au sujet de l'indépendance des variables X et Y. En effet, X et Y indépendantes $\Rightarrow cov(X;Y) = 0$, mais $cov(X;Y) = 0 \not\Rightarrow X$ et Y indépendantes.

Exercice 2

Question 1 - Estimateur sans biais de la variance

L'estimateur suivant est un estimateur sans biais de la variance : $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$. Ici, $S^2 = \frac{499000}{500-1} = \frac{499000}{499} = 1000$

Question 2 - Variance de la moyenne empirique

$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Pour estimer sa valeur pour l'échantillon, on remplace la variance théorique σ^2 par son estimateur sans biais S^2 : $\widehat{V(\bar{X})} = \frac{S^2}{n} = \frac{1000}{500} = 2$

Question 3 - Loi de la moyenne empirique

La moyenne empirique $\bar{X}$ suit une loi Normale d'espérance m et de variance $\frac{\sigma^2}{n}$.