Statistiques appliquées - L3 d'Economie
Interrogation écrite N°2 - Groupe 9

Marc SANGNIER - marc.sangnier@ens-cachan.fr

21 décembre 2007

Durée : 1h15
Calculette non autorisée
Aucun document autorisé

Exercice 1

Soit une variable aléatoire réelle continue X de densité $f(x) = \frac{2}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)$ si $0 \leq x \leq \theta$, $f(x) = 0$ sinon. On dispose d'un échantillon de n observations x_i de la variable aléatoire X.

Question 1

Montrez que $E(X) = \frac{\theta}{3}$.

Question 2

Rappelez en quoi consiste l'estimation par la méthode des moments.

Question 3

Estimez le paramètre θ par la méthode des moments.

Exercice 2

Soit une variable aléatoire réelle continue X qui suit une loi Normale d'espérance m et de variance σ^2. Sa densité s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On dispose d'un échantillon de n observations x_i de la variable aléatoire X. On suppose que ces observations sont indépendantes.

Question 1

Quel type de phénomène pourriez-vous modèliser par une loi Normale ? Expliquez.

Question 2

Donnez la fonction de vraisemblance de l'échantillon $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$, faites en clairement apparaître les paramètres.

Question 3

Donnez la fonction de log-vraisemblance de cet échantillon.

Question 4

Estimez la variance σ^2 par la méthode du maximum de vraisemblance. Vous appelerez $\hat{\sigma^2}$ l'estimateur obtenu.

Question 5

De quel paramètre inconnu dépend $\hat{\sigma^2}$?

Question 6

Estimez l'espérance m par la méthode du maximum de vraisemblance. Vous appelerez $\hat{m}$ l'estimateur obtenu.

Question 7

Quelle est la loi suivie par l'estimateur $\hat{m}$?

Question 8

Rappelez la définition d'un estimateur convergent. Montrez que l'estimateur $\hat{m}$ est convergent.

Question 9

Construisez analytiquement un intervalle de confiance à 95% pour la vraie valeur de m. Définissez clairement vos notations.

Question 10

On dispose d'une réalisation de l'échantillon telle que $\hat{m} = 100$ et $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 10$. On sait par ailleurs que pour une loi Normale centrée-réduite de fonction de répartition $F(.)$: $F(u) = 0,975 \Longleftrightarrow u = 1,96$. Donnez l'expression numérique de l'intervalle de confiance à 95% pour la vraie valeur de m.

Exercice 3

Soit la fonction de production Cobb-Douglas suivante :

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta} \tag{1}$$

Dans l'équation (1), Y représente la quantité de biens produite, A est un réel non nul, K le capital (nombre de machines) et L le travail (nombre d'ouvriers).

Question 1

En utilisant une transformation logarithmique, écrivez l'équation (1) sous forme linéaire.
Vous noterez $log(A) = a$, $log(Y) = y$, $log(L) = l$ et $log(K) = k$.

Question 2

Donnez le modèle économètrique qui vous permettrait d'estimer les paramètres a, α et β par la méthodes des moindres carrés. Définissez rigoureusement vos notations et expliquez les différences entre le modèle économique et le modèle économètrique.

Question 3

On suppose que l'estimation du modèle économètrique nous a permis d'obtenir l'expression suivante, où $\hat{a}$, $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont les estimateurs de a, α et β :

$$y = \hat{a} + \hat{\alpha}k + \hat{\beta}l \tag{2}$$

En vous rappelant que $d\left[log(X)\right] = \frac{dX}{X}$, écrivez la différentielle totale de l'équation (2).

Question 4

Donnez l'interprétation économique de $\hat{\alpha}$ ou $\hat{\beta}$ (au choix).