Statistiques appliquées - L3 d'Economie
Interrogation écrite N°2 - Groupe 12

Marc SANGNIER - marc.sangnier@ens-cachan.fr

21 décembre 2007

Durée : 1h15
Calculette non autorisée
Aucun document autorisé

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On dispose d'un échantillon de n observations x_i de la variable aléatoire X. On suppose que ces observations sont indépendantes. X suit une loi Géomètrique de paramètre p :

$$\forall k \in \mathbb{N} - \{0\} : P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Si X suit une loi Géomètrique de paramètre p, alors $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Question 1

Rappelez en quoi consiste l'estimation par la méthode des moments.

Question 2

Estimez le paramètre p par la méthode des moments.

Question 3

Quel type de phénomène pourriez-vous modèliser par une loi Géomètrique ? Expliquez.

Question 4

Donnez la fonction de vraisemblance de l'échantillon $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$, faites en clairement apparaître les paramètres.

Question 5

Donnez la fonction de log-vraisemblance de cet échantillon.

Question 6

Estimez p par la méthode du maximum de vraisemblance. Vous appelerez $\hat{p}$ l'estimateur obtenu.

Question 7

Montrez que $\hat{p}$ est un estimateur sans bias de p.

Exercice 2

Soit la fonction de production Cobb-Douglas suivante, écrite sous forme logarithmique :

$$y = a + \alpha k + \beta l \tag{1}$$

Dans l'équation (1), y représente le logarithme de la quantité de biens produite, a est un réel, k le logarithme du capital (nombre de machines) et l le logarithme du travail (nombre d'ouvriers).

Question 1

Donnez le modèle économètrique qui vous permettrait d'estimer les paramètres a, α et β par la méthodes des moindres carrés. Définissez rigoureusement vos notations et expliquez les différences entre le modèle économique et le modèle économètrique.

Question 2

On suppose que l'estimation du modèle économètrique nous a permis d'obtenir l'expression suivante, où $\hat{a}$, $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont les estimateurs de a, α et β :

$$y = \hat{a} + \hat{\alpha}k + \hat{\beta}l \tag{2}$$

En vous rappelant que $d\left[log(X)\right] = \frac{dX}{X}$, écrivez la différentielle totale de l'équation (2).

Question 3

Donnez l'interprétation économique de $\hat{\alpha}$ ou $\hat{\beta}$ (au choix).

Exercice 3

Soit une variable aléatoire réelle continue X qui suit une loi Normale d'espérance m et de variance σ^2. On dispose d'un échantillon de n observations x_i de la variable aléatoire X. On suppose que ces observations sont indépendantes. La fonction de log-vraisemblance de l'échantillon est :

$$ln\left[L(m;\sigma^2;x_1;x_2;...;x_n)\right] = -\frac{n}{2}ln(2\pi) - \frac{n}{2}ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$$

Question 1

Estimez la variance σ^2 par la méthode du maximum de vraisemblance. Vous appelerez $\hat{\sigma^2}$ l'estimateur obtenu.

Question 2

De quel paramètre inconnu dépend $\hat{\sigma^2}$?

Question 3

$\hat{\sigma^2}$ est un estimateur biaisé de σ^2, comment pouvez-vous le transformer pour obtenir un estimateur non biaisé de la variance ?

Question 4

L'estimateur $\hat{m}$ de m par la méthode du maximum de vraisemblance est $\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Quelle est la loi suivie par l'estimateur $\hat{m}$?

Question 5

Rappelez la définition d'un estimateur convergent. Montrez que l'estimateur $\hat{m}$ est convergent.

Question 6

Construisez analytiquement un intervalle de confiance à 90% pour la vraie valeur de m. Définissez clairement vos notations.

Question 7

On dispose d'une réalisation de l'échantillon telle que $\hat{m} = 1000$ et $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 100$. On sait par ailleurs que pour une loi Normale centrée-réduite de fonction de répartition $F(.)$: $F(u) = 0,95 \Longleftrightarrow u = 1,64$. Donnez l'expression numérique de l'intervalle de confiance à 90% pour la vraie valeur de m.