Statistiques appliquées - L3 d'Economie
Interrogation écrite N°1 - Groupe 9 - Corrigé

Marc SANGNIER

16 novembre 2007

Exercice 1

Question 1 - Loi marginale de X

X peut prendre 8 valeurs différentes :
$P(X=k) = exp(-3)\frac{3^k}{k!}$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$P(X=k) = 1 - \sum_{h=0}^{6} P(X=h)$ pour $k = 7$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=k)$	0,05	0,15	0,22	0,22	0,17	0,10	0,05	0,04

$E(X) = \sum_{k=0}^{7} k * P(X=k) = 3,01 \approx 3$

Question 2 - Loi jointe du couple

$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(Y = y_j \mid X = x_i) * P(X = x_i)$, $\forall i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, $\forall j = 0, 1$

$P(X = x_i \cap Y = y_j)$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0,005	0,030	0,066	0,088	0,085	0,060	0,035	0,032
1	0,045	0,120	0,154	0,132	0,085	0,040	0,015	0,008

Question 3 - Loi marginale de Y

La variable aléatoire Y suit sune loi de Bernouilli de paramètre p.
$p = 0,045 + 0,120 + 0,154 + 0,132 + 0,085 + 0,040 + 0,015 + 0,008 = 0,599 \approx 0,6$
$E(Y) = p = 0,6$
$V(Y) = p * (1-p) = 0,6 * 0,4 = 0,24$

Question 4 - Covariance du couple

$cov(X;Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1,51 - 0,6 * 3,01 = -0,296$

Exercice 2

Question 1 - Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

$\forall \varepsilon > 0,\ P(\mid X - E(X) \mid \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

Question 2 - Application

Calculons tout d'abord l'espérance de X :
$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} xf(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x(1+3x^2)dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x + 3x^3)dx$
$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right] = 0$
Calculons la variance de X :
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{4}(1+3x^2)dx$
$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x^2 + 3x^4 dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{5}\right] = \frac{7}{15}$
La condition recherchée est $P(X \leq -k) + P(k \leq X) \leq 0,75 \Longleftrightarrow P(\mid X \mid \geq k) \leq 0,75$
Ecrivons l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev pour X :

$\forall\varepsilon > 0,\ P(\mid X - E(X) \mid\geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, P(\mid X \mid\geq \varepsilon) \leq \frac{7/15}{\varepsilon^2}$
Posons $\varepsilon = k$, il vient alors $P(\mid X \mid\geq k) \leq \frac{7/15}{k^2}$
Posons alors $\frac{7/15}{k^2} = 0,75 \Longleftrightarrow k^2 = \frac{7/15}{0{,}75} \Longleftrightarrow k = \sqrt{0,62} \approx 0,79$
L'intervalle recherché est donc $[-0,79; 0,79]$.

Exercice 3

Question 1 - Estimateur sans biais

Un estimateur $\hat{\theta}$ de θ est sans biais si $E(\hat{\theta}) = \theta$

Question 2 - Estimateur sans biais de la variance

Transformons tout d'abord l'écriture de S^2 :
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - m + m - \bar{X})^2$
$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n [(X_i - m) - (\bar{X} - m)]^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n [(X_i - m)^2 + (\bar{X} - m)^2 - 2(X_i - m)(\bar{X} - m)]$
$= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\bar{X} - m)^2 - 2(\bar{X} - m)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - m)\right]$
$= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 + (\bar{X} - m)^2 - 2(\bar{X} - m)^2\right] = \frac{n}{n-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - m)^2}{n} - (\bar{X} - m)^2\right]$
Passons maintenant à l'espérance :
$E(S^2) = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}E[\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2] - E[(\bar{X} - m)^2]\right] = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[(X_i - m)^2] - V(\bar{X})\right]$
$= \frac{n}{n-1}\left[V(X_i) - \frac{\sigma^2}{n}\right] = \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right] = \frac{n}{n-1}\left[\frac{(n-1)\sigma^2}{n}\right] = \sigma^2$
S^2 est donc un estimateur sans biais de la variance.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire réelle. $V(X)$ est la variance de X.

Question 1 - Ecriture de la variance

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Question 2 - Démonstration d'une formule

On veut démontrer la formule suivante : $V(aX + b) = a^2V(X)$
$V(aX + b) = E[(aX + b)^2] - [E(aX + b)]^2$
$= E[a^2X^2 + b^2 + 2abX] - [aE(X) + b]^2$
$= a^2E(X^2) + b^2 + 2abE(X) - [a^2E(X)^2 + b^2 + 2abE(X)]$
$= a^2E(X^2) + b^2 + 2abE(X) - a^2E(X)^2 - b^2 - 2abE(X)$
$= a^2E(X^2) - a^2E(X)^2 = a^2[E(X^2) - E(X)^2] = a^2V(X)$