Statistiques appliquées - L3 d'Economie
Interrogation écrite N°1 - Groupe 9

Marc SANGNIER

16 novembre 2007

Durée : 1h15
Calculette autorisée et recommandée
Document autorisé : une page recto-verso préparée par vos soins
Attention : merci de rendre votre formulaire avec votre copie !!!

Exercice 1

Soient $(X;Y)$ un couple de deux variables aléatoires réelles discrètes.

Question 1

On admet :
- que X peut prendre 8 valeurs : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.
- que X suit une loi de Poisson de paramètre 3 pour les 7 premières valeurs (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Calculez et présentez dans un tableau la loi marginale de X. Vous arrondirez les probabilités à deux chiffres après la virgule.

Quelle est l'espèrance de X ?

Indication

$P(X=7) = 1 - \sum_{k=0}^{6} P(X=k)$

Question 2

Le tableau suivant rassemble les distributions conditionnelles de Y sachant $X = x_i$:

$P(Y = y_i \mid X = x_i)$	$x_i = 0$	$x_i = 1$	$x_i = 2$	$x_i = 3$	$x_i = 4$	$x_i = 5$	$x_i = 6$	$x_i = 7$
$y_i = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$y_i = 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2

Présentez dans un tableau la loi jointe du couple $(X;Y)$. Vous arrondirez les probabilités à trois chiffres après la virgule.

Indication

Rappelez-vous de : $P(A \mid B)P(B) = P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$ pour A et B deux événements.

Question 3

Quelle est la loi marginale suivit par Y ? Quelle est l'espérance de Y ? Quelle est la variance de Y ?

Question 4

Sachant que $E(XY) = 1,51$, calculez la covariance du couple $(X;Y)$.

Exercice 2

Question 1

Rappelez l'énoncé de l'Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.

Question 2

En utilisant l'Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, répondez à la question suivante :
Soit X une variable aléatoire continue de densité $f(x) = \frac{1}{4}(1+3x^2)$ si $x \in [-1;1]$, $f(x) = 0$ sinon.
Déterminez un intervalle de la forme $[-k;k]$ qui ne contienne pas X avec une probabilité inférieure à $0,75$.

Indication

On cherche k tel que $P(X \leq -k) + P(k \leq X) \leq 0,75$.

Exercice 3

Question 1

Rappelez la définition d'un estimateur sans biais.

Question 2

Soit une suite de variables aléatoires (X_n).
$\forall i, E(X_i) = m$
$\forall i, V(X_i) = \sigma^2$
On dispose de n observations.
$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est la moyenne empirique, un estimateur sans biais de la moyenne.
Montrez que $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ est un estimateur sans biais de la variance.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire réelle. $V(X)$ est la variance de X.

Question 1

Ecrivez $V(X)$ comme la différence de deux termes dépendants de X.

Question 2

Démontrez la formule suivante : $V(aX+b) = a^2V(X)$