Statistiques appliquées - L3 d'Economie
Interrogation écrite N°1 - Groupe 12 - Corrigé

Marc SANGNIER

16 novembre 2007

Exercice 1

Question 1 - Loi marginale de X

X peut prendre 8 valeurs différentes :
$P(X = k) = exp(-3)\frac{3^k}{k!}$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$P(X = k) = 1 - \sum_{h=0}^{6} P(X = h)$ pour $k = 7$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = k)$	0,05	0,15	0,22	0,22	0,17	0,10	0,05	0,04

$E(X) = \sum_{k=0}^{7} k * P(X = k) = 3,01 \approx 3$

Question 2 - Covariance du couple

$cov(X;Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1,51 - 0,6 * 3,01 = -0,296$

Question 3 - Loi marginale de Y

Y suit une loi de Bernouilli. On sait que si Y suit une loi de Bernouilli de paramètre p, alors $E(Y) = p$.
Or, on sait que $E(Y) = 0,6$. Le paramètre de la loi de Bernouilli suivie par Y est donc $p = 0,6$.
$V(Y) = p * (1 - p) = 0,6 * 0,4 = 0,24$

Question 4 - Distributions conditionnelles de Y sachant X

$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(Y = y_j \mid X = x_i) * P(X = x_i), \forall i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \forall j = 0, 1$
Le tableau suivant rassemble les distributions conditionnelles de Y sachant $X = x_i$:

$P(Y = y_i \mid X = x_i)$	$x_i = 0$	$x_i = 1$	$x_i = 2$	$x_i = 3$	$x_i = 4$	$x_i = 5$	$x_i = 6$	$x_i = 7$
$y_i = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$y_i = 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2

Exercice 2

Question 1 - Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

$\forall \varepsilon > 0,\ P(\mid X - E(X) \mid \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

Question 2 - Application

On cherche n tel que $P\left(\mid \frac{X_n}{n} - p \mid < 0,01\right) \geq 0,95$.
X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p, donc $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1 - p)$
On peut donc en déduire $E(\frac{1}{n}X_n) = p$
Par ailleurs, $V(\frac{1}{n}X_n) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{1}{n^2}np(1 - p) = \frac{1}{n}p(1 - p)$
Ecrivons l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev pour la variable aléatoire $\frac{1}{n}X_n$ en posant $\varepsilon = 0,001$:
$P\left(\mid \frac{1}{n}X_n - p \mid \geq 0,01\right) \leq \frac{p(1-p)}{n*(0,01^2)} \Longleftrightarrow P\left(\mid \frac{1}{n}X_n - p \mid \geq 0,01\right) \leq \frac{10000*p(1-p)}{n}$
Nous allons maintenant majorer le membre de droite :

$p(1-p) = -p^2 + p = -(p^2 - p) = -[p^2 - 2p\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}] = -[(p-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}] = -(p-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$
Comme $(p-\frac{1}{2})^2 \geq 0$, on peut écrire $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$
D'où $\frac{10000*p(1-p)}{n} \leq \frac{2500}{n}$
Il vient alors :
$P\left(\mid \frac{1}{n}X_n - p \mid \geq 0,01\right) \leq \frac{2500}{n} \Longleftrightarrow 1 - P\left(\mid \frac{X_n}{n} - p \mid < 0,01\right) \leq \frac{2500}{n}$
$\Longleftrightarrow P\left(\mid \frac{X_n}{n} - p \mid < 0,01\right) \geq 1 - \frac{2500}{n}$
Pour avoir $P\left(\mid \frac{X_n}{n} - p \mid < 0,01\right) \geq 0,95$ il suffit d'avoir $1 - \frac{2500}{n} \geq 0,95 \Longleftrightarrow n \geq 50000$

Exercice 3

Question 1 - Estimateur sans biais

Un estimateur $\hat{\theta}$ de θ est sans biais si $E(\hat{\theta}) = \theta$

Question 2 - Estimateur sans biais de la variance

Transformons tout d'abord l'écriture de S^2 :
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m + m - \bar{X})^2$
$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(X_i - m) - (\bar{X} - m)]^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(X_i - m)^2 + (\bar{X} - m)^2 - 2(X_i - m)(\bar{X} - m)]$
$= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - m)^2 - 2(\bar{X} - m)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\right]$
$= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 + (\bar{X} - m)^2 - 2(\bar{X} - m)^2\right] = \frac{n}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - m)^2}{n} - (\bar{X} - m)^2\right]$
Passons maintenant à l'espérance :
$E(S^2) = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2] - E[(\bar{X} - m)^2]\right] = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[(X_i - m)^2] - V(\bar{X})\right]$
$= \frac{n}{n-1}\left[V(X_i) - \frac{\sigma^2}{n}\right] = \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right] = \frac{n}{n-1}\left[\frac{(n-1)\sigma^2}{n}\right] = \sigma^2$
S^2 est donc un estimateur sans biais de la variance.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{k}{x^3}$ si $x \geq 1$, $f(x) = 0$ sinon.

Question 1 - Densité

On veut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)fx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{k}{x^3}dx$
$= \left[-\frac{k}{2x^2}\right]_1^{+\infty} \approx 0 + \frac{k}{2}$
Donc $k = 2$

Question 2 - Fonction de répartition

Si $x < 1$, $F(x) = 0$
Si $x \geq 1$, $F(x) = \int_1^x f(t)dt = \left[-\frac{1}{t^2}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^2}$