Statistiques appliquées - L3 d'Economie
Interrogation écrite N°1 - Groupe 12

Marc SANGNIER

16 novembre 2007

Durée : 1h15
Calculette autorisée et recommandée
Document autorisé : une page recto-verso préparée par vos soins
Attention : merci de rendre votre formulaire avec votre copie!!!

Exercice 1

Soient $(X;Y)$ un couple de deux variables aléatoires réelles discrètes.

Question 1

On admet :
- que X peut prendre 8 valeurs : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.
- que X suit une loi de Poisson de paramètre 3 pour les 7 premières valeurs (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Calculez et présentez dans un tableau la loi marginale de X. Vous arrondirez les probabilités à deux chiffres après la virgule.

Quelle est l'espèrance de X ?

Indication

$P(X=7) = 1 - \sum_{k=0}^{6} P(X=k)$

Question 2

Sachant que $E(XY) = 1,51$ et $E(Y) = 0,6$, calculez la covariance du couple $(X;Y)$.

Question 3

Y suit une loi de Bernouilli.
Quel est le paramètre de cette loi ? Quelle est la variance de Y ?

Question 4

Le tableau suivant rassemble la loi jointe du couple $(X;Y)$:

$P(Y = y_i \cap X = x_i)$	$x_i = 0$	$x_i = 1$	$x_i = 2$	$x_i = 3$	$x_i = 4$	$x_i = 5$	$x_i = 6$	$x_i = 7$
$y_i = 0$	0,005	0,030	0,066	0,088	0,085	0,060	0,035	0,032
$y_i = 1$	0,045	0,120	0,154	0,132	0,085	0,040	0,015	0,008

Présentez dans un tableau les distributions conditionnelles de Y sachant $X = x_i$. Vous arrondirez les probabilités à 1 chiffre après la virgule.

Indication

Rappelez-vous de : $P(A \mid B)P(B) = P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$ pour A et B deux événements.

Exercice 2

Question 1

Rappelez l'énoncé de l'Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.

Question 2

En utilisant le l'Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, répondez à la question suivante :

Une urne contient des boules jaunes et des boules vertes. Les boules vertes s'y trouve en proportion p. On effectue n tirages d'une boule avec remise. On note X_n le nombre de boules blanches obtenues. Trouvez une condition sur n pour que la probabilité que p appartienne à $\left]\frac{X_n}{n} - 0,01; \frac{X_n}{n} + 0,01\right[$ soit supérieure à $0,95$.

Indication

X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Par ailleurs, vous pouvez utiliser le résultat suivant sans le démontrer : $p(1-p)10000 \leq 2500$

Exercice 3

Question 1

Rappelez la définition d'un estimateur sans biais.

Question 2

Soit une suite de variables aléatoires (X_n).
$\forall i, E(X_i) = m$
$\forall i, V(X_i) = \sigma^2$
On dispose de n observations.
$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est la moyenne empirique, un estimateur sans biais de la moyenne.
Montrez que $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ est un estimateur sans biais de la variance.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{k}{x^3}$ si $x \geq 1$, $f(x) = 0$ sinon.

Question 1

Déterminez k pour que f soir la densité d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle continue X.

Question 2

Donnez la fonction de répartition de X.