Microéconomie (L1 d'économie) - TD 4 - Corrigé

Marc Sangnier - marc.sangnier@ens-cachan.fr

31 mars 2008

Exercice 1

La fonction de production de l'entreprise est la suivante :

$$f(l) = 3l^{1/3} \tag{1}$$

Dans l'expression (1), l désigne la quantité de travail utilisée.

Question 1

Soit p le prix de vente du produit. Soit s le prix du travail.
Le coût supporté par l'entreprise qui utilise l unités de travail est donc :

$$C(l) = s * l$$

De même, la recette de l'entreprise qui produit et vend $f(l)$ unités de bien est :

$$R(l) = f(l) * p$$

Par conséquent, le profit de l'entreprise peut s'écrire de la façon suivante :

$$\pi(l) = R(l) - C(l) = f(l) * p - s * l \tag{2}$$

L'entreprise va donc déterminer sa demande de travail en maximisant l'expression (2).
La condition du premier ordre de cette maximisation est :

$$\pi'(l) = 0$$

$$\iff f'(l) * p - s = 0 \iff l^{-2/3} * p - s = 0 \iff l^{2/3} = \frac{p}{s}$$

On peut donc en déduire la quantité $\hat{l}$ de travail demandée :

$$\hat{l} = \left(\frac{p}{s}\right)^{3/2}$$

Question 2

L'offre de bien de concurrence parfaite $\hat{y}$ s'obtient en utilisant la demande de travail dans la fonction de production :

$$\hat{y} = f(\hat{l}) = 3\left[\left(\frac{p}{s}\right)^{3/2}\right]^{1/3}$$

D'où :

$$\hat{y} = 3\left(\frac{p}{s}\right)^{1/2}$$

Exercice 3

Notons y la quantité produite par l'entreprise. A partir de la fonction de production on peut écrire :

$$l = \frac{y^3}{27}$$

Par ailleurs, la fonction de coût s'écrivant $C(l) = sl$, on peut en déduire :

$$C(y) = s\frac{y^3}{27}$$

Le profit s'écrit :

$$\pi(y) = py - C(y)$$

L'offre de l'entreprise est déterminée par la condition suivante :

$$\pi'(y) = 0$$

$$\Longleftrightarrow p - C'(y) = 0 \Longleftrightarrow p = s\frac{3}{27}y^2 \Longleftrightarrow y^2 = 9\frac{p}{s}$$

D'où :

$$\hat{y} = 3\left(\frac{p}{s}\right)^{1/2}$$

Exercice 2

La fonctionde production de l'entrepris est la suivante :

$$f(q_1; l) = 2q_1^{1/2}l^{1/2}$$

Question 1

Pour déterminer la nature des rendements d'échelle de cette fonction, on étudie $f(\lambda q_1; \lambda l)$.

$$f(\lambda q_1; \lambda l) = 2\left(\lambda q_1\right)^{1/2}\left(\lambda l\right)^{1/2} = 2\lambda^{1/2+1/2}q_1^{1/2}l^{1/2} = \lambda f(q_1 : l)$$

On en déduit donc que les rendements d'échelle sont constants.

Question 2

Deux combinaisons d'inputs se situent sur la même isoquante si ils premettent d'obtenir le même niveau d'output.

$$f(1; 4) = 2 * 1^{1/2} * 4^{1/2} = 2 * 2 = 4$$

$$f(2; 2) = 2 * 2^{1/2} * 2^{1/2} = 2 * 2 = 4$$

Les combinaisons d'inputs $(1; 4)$ et $(2; 2)$ se trouvent donc sur la même isoquante.
Le taux marginal de substitution technique se calcule par le rapport des productivités marginales :

$$TMS\left(q_1; l\right) = \frac{f'_{q_1}(q_1; l)}{f'_l(q_1; l)} = \frac{2 * \frac{1}{2} * q_1^{-1/2}l^{1/2}}{2 * \frac{1}{2} * q_1^{1/2}l^{-1/2}} = \frac{l}{q_1}$$

En $(1; 4)$ le taux marginal de substitution est donc de 4.

Question 3

L'équation du sentier d'expansion exprime la relation entre les inputs qui minimise les coûts de l'entreprise. Elle s'obtient en égalisant le taux marginal de substitution au rapport des prix.

$$TMS(q_1;l) = \frac{p_1}{s} \Longleftrightarrow \frac{l}{q_1} = \frac{p_1}{s}$$

D'où :

$$l = \frac{p_1}{s} q_1 \tag{3}$$

Question 4

Les rendements d'échelle étant constants, on peut en déduire que le coût marginal de l'entreprise est également constant.

Question 5

Une fonction de coût est toujours croissante (il est toujours plus côuteux de produire plus). Par ailleurs, le coût marginal étant constant, on sait que chaque unité supplémentaire induit le même coût. Par conséquent, la fonction de coût peut être représentée par une droite croissante dont la pente est déterminée par le coût marginal.

Question 6

Le coût marginal de l'entreprise étant constant, sa fonction de côut est de la forme $C(q) = cq$ où c est le coût marginal et q la quantité produite. Cette quantité est vendue au prix p, le profit s'écrit donc $\pi(q) = pq - cq = (p-c)\,q$. Il est clair que si $p < c$, alors le profit est toujours négatif et l'entreprise n'a aucun intérêt à produire (la production est nulle). Si $p > c$, alors le profit est toujours positif et l'entreprise a toujours intérêt à produire davantage (la production est infinie). Si $p = c$, alors le profit est nul et la production est indéterminée.

Exmainons maintenant l'entreprise étudiée ici. Déterminons tout d'abord la fonction de coût de l'entreprise. Cette fonction s'écrit :

$$C(q_1;l) = q_1 p_1 + ls \tag{4}$$

Dans l'équation (4), q_1 et l représentent les quantités d'inputs utilisées.

En utilisant l'équation (3), on peut écrire :

$$C(q_1) = q_1 p_1 + \frac{p_1}{s} q_1 s = 2 q_1 p_1$$

Toujours en utilisant l'équation (3), on peut érire la fonction de production de la façon suivante :

$$f(q_1) = 2 q_1^{1/2} \left(\frac{p_1}{s} q_1\right)^{1/2} = 2 q_1 \left(\frac{p_1}{s}\right)^{1/2} \tag{5}$$

Notons y la quantité produite. On peut déduire de (5) la relation suivante :

$$q_1 = \frac{y}{2} \left(\frac{s}{p_1}\right)^{1/2}$$

La fonction de coût peut finalement s'écrire :

$$C(y) = 2 p_1 \frac{y}{2} \left(\frac{s}{p_1}\right)^{1/2} = y \left(p_1 s\right)^{1/2}$$

La prodution est vendue au prix p. Le profit de l'entreprise s'écrit donc :

$$\pi(y) = py - y\left(p_1 s\right)^{1/2} = y\left(p - \left(p_1 s\right)^{1/2}\right)$$

Pour que l'offre ne soit ni nulle ni infinie, il faut :

$$p = (p_1 s)^{1/2}$$

Exercice 4

La fonction de production de l'entreprise est :

$$f(q_1; l) = 4q_1^{1/2} l^{1/4}$$

Le prix du bien 1 est égal à 2 et le salaire est égal à 1. Soit p le prix de vente de la production.

Question 1

Le profit de l'entreprise s'écrit :

$$\pi(q_1; l) = pf(q_1; l) - 2q_1 - l$$

La maximisation de cette expression conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi'_{q_1}(q_1; l) = 0 \\ \pi'_l(q_1; l) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} pf'_{q_1}(q_1; l) - 2 = 0 \\ pf'_l(q_1; l) - 1 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} p4\frac{1}{2}q_1^{-1/2} l^{1/4} = 2 \\ p4\frac{1}{4}q_1^{1/2} l^{-3/4} = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} pl^{1/4} = q_1^{1/2} \\ p^2 l^{1/4} l^{-3/4} = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} q_1 = p^4 \\ l = p^4 \end{array} \right.$$

En utilisant ces solutions dans la fonction de production, on obtient la fonction d'offre :

$$y = 4p^2 p = 4p^3$$

Question 2

L'expression du sentier d'expansion s'obient à partir de l'égalité entre le taux marginal de substitution et le rapport des prix :

$$\frac{4\frac{1}{2}q_1^{-1/2} l^{1/4}}{4\frac{1}{4}q_1^{1/2} l^{-3/4}} = \frac{2}{1} \iff q_1 = l$$

La fonction de coût peut donc s'écrire :

$$C(q_1) = 2q_1 + q_1 = 3q_1$$

De même, on peut écrire la fonction de production comme suit :

$$f(q_1) = 4q_1^{3/4}$$

Notons y la quantité produite. Il vient :

$$q_1 = \left(\frac{y}{4}\right)^{4/3}$$

Ce qui permet de ré-écrire la fonction de coût :

$$C(y) = 3\left(\frac{y}{4}\right)^{4/3}$$

Le profit de l'entreprise s'écrit :

$$\pi(y) = py - C(y)$$

La condition pour maximiser cette expression est :

$$\pi'(y) = 0 \Longleftrightarrow p - C'(y) = 0$$

$$\Longleftrightarrow p = 3\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{4/3} y^{1/3} \Longleftrightarrow y^{1/3} = p4^{1/3}$$

D'où la fonction d'offre :

$$y = 4p^3$$