Microéconomie 1 (L1 d'Economie)
Interrogation écrite N°1 - Corrigé

Marc Sangnier - marc.sangnier@ens-cachan.fr

19 mars 2008

Exercice 1 (8 points)

Soit un consommateur dont la fonction d'utilité est $U(q_1; q_2) = q_1^{\alpha} q_2^{1-\alpha}$ avec q_1 la quantité consommée du bien 1 et q_2 la quantité consommée du bien 2. Soit p_1 le prix du bien 1 et p_2 le prix du bien 2. Soit $\left(q_1^0; q_2^0\right)$ la dotation initiale du consommateur en biens 1 et 2.

Question 1.1 (1)

La contrainte budgétaire du consommateur s'écrit :

$$q_1 p_1 + q_2 p_2 \leq q_1^0 p_1 + q_2^0 p_2$$

La contrainte budgétaire saturée s'écrit :

$$q_1 p_1 + q_2 p_2 = q_1^0 p_1 + q_2^0 p_2$$

Question 1.2 (1)

Le taux marginal de substitution s'écrit :

$$TMS(q_1; q_2) = \frac{U'_{q_1}(q_1; q_2)}{U'_{q_2}(q_1; q_2)} = \frac{\alpha q_1^{\alpha-1} q_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) q_1^{\alpha} q_2^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{q_2}{q_1}$$

Question 1.3 (1,5)

Les conditions qui doivent être vérifiées à l'optimum du consommateur sont :
- la contrainte budgétaire saturée ;
- l'égalité entre le taux marginal de substitution et le rapport des prix.

On obtient donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} q_1 p_1 + q_2 p_2 = q_1^0 p_1 + q_2^0 p_2 \\ TMS(q_1; q_2) = \frac{p_1}{p_2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} q_1 p_1 + q_2 p_2 = q_1^0 p_1 + q_2^0 p_2 \\ \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{q_2}{q_1} = \frac{p_1}{p_2} \end{array} \right.$$

Question 1.4 (0,5)

Les paramètres de ce système sont les prix, les dotations initiales et α. Les inconnues sont q_1 et q_2, les quantités de bien consommées.

Question 1.5 (2)

Reprenons le système précédent :

$$\left\{\begin{array}{c} q_1p_1+q_2p_2=q_1^0p_1+q_2^0p_2 \\ \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{q_2}{q_1}=\frac{p_1}{p_2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} q_1p_1+q_2p_2=q_1^0p_1+q_2^0p_2 \\ \frac{\alpha}{1-\alpha}q_2p_2=q_1p_1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\alpha}{1-\alpha}q_2p_2+q_2p_2=q_1^0p_1+q_2^0p_2 \\ \frac{\alpha}{1-\alpha}q_2p_2=q_1p_1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{1-\alpha}q_2p_2=q_1^0p_1+q_2^0p_2 \\ \frac{\alpha}{1-\alpha}q_2p_2=q_1p_1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} q_2=\frac{(1-\alpha)}{p_2}\left(q_1^0p_1+q_2^0p_2\right) \\ \frac{\alpha}{1-\alpha}q_2p_2\frac{1}{p_1}=q_1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} q_2=\frac{(1-\alpha)}{p_2}\left(q_1^0p_1+q_2^0p_2\right) \\ q_1=\frac{\alpha}{p_1}\left(q_1^0p_1+q_2^0p_2\right) \end{array}\right.$$

Question 1.6 (1)

Soit $\alpha=\frac{1}{2}$. La dotation initiale du consommateur est $\left(q_1^0;q_2^0\right)=(3;4)$. Le vecteur des prix auquel le consommateur fait face est $(p_1;p_2)=(1;2)$.

Calculons la valeur du taux marginal de substitution au point de dotation initiale :

$$TMS(3;4)=\frac{4}{3}$$

Par ailleurs, le rapport des prix est :

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{2}$$

On a donc :

$$TMS(3;4)\neq\frac{p_1}{p_2}$$

L'une des conditions de l'optimum n'est donc pas respectée.

Question 1.7 (1)

Calculons la valeur de la dotation initiale du consommateur :

$$q_1^0p_1+q_2^0p_2=3*1+4*2=3+8=11$$

En utilisant les calculs faits dans les questions précédentes, on obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{c} q_2=\frac{1/2}{2}11 \\ q_1=\frac{1/2}{1}11 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} q_2=\frac{11}{4} \\ q_1=\frac{11}{2} \end{array}\right.$$

Exercice 2 (7 points)

Soit un ménage dont la fonction d'utilité est $U(q;l)=\frac{1}{3}ln(q)+\frac{2}{3}ln(l)$ avec q la quantité consommée d'un bien quelconque et l le temps consacré aux loisirs. Ce ménage dispose d'un temps total T qu'il peut utiliser soit en temps de travail L, soit consacrer aux loisirs. Soit p le prix du bien consommé en quantité q. Soit w la rémunération obtenue pour chaque unité de temps consacrée au travail.

Question 2.1 (1)

On peut appliquer à la fonction $U(q;l)$ la transformation suivante :

$$V(q;l)=exp\left\{U(q;l)\right\}=exp\left\{\frac{1}{3}ln(q)+\frac{2}{3}ln(l)\right\}=exp\left\{ln(q^{1/3})\right\}*exp\left\{ln(l^{2/3})\right\}=q^{1/3}l^{2/3}$$

Question 2.2 (1)

Le ménage fait face à une contrainte de budget et à une contrainte de temps :

$$\begin{cases} pq \leq wL \\ l + L = T \end{cases}$$

Question 2.3 (3,5)

La contrainte de temps peut être intégrée à la contrainte budgétaire de la façon suivante :

$$pq \leq w(T - l) \Longleftrightarrow pq \leq wT - wl \Longleftrightarrow pq + wl \leq wT$$

w apparaît alors comme le “prix” du temps consacré aux loisirs.
La contrainte budgétaire saturée du ménage s'écrit donc :

$$pq + wl = wT$$

Exprimons le taux marginal de substitution à partir de la fonction $V(q; l)$:

$$TMS(q; l) = \frac{V'_q(q; l)}{V'_l(q; l)} = \frac{\frac{1}{3}q^{-2/3}l^{2/3}}{\frac{2}{3}q^{1/3}l^{-1/3}} = \frac{l}{2q}$$

Notons qu'on obtient le même résultat à partir de la fonction $U(q; l)$:

$$TMS(q; l) = \frac{U'_q(q; l)}{U'_l(q; l)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{q}}{\frac{2}{3}\frac{1}{l}} = \frac{l}{2q}$$

Résolvons le système suivant pour obtenir les demandes de bien et de loisir :

$$\begin{cases} pq + wl = wT \\ TMS(q; l) = \frac{p}{w} \end{cases}$$

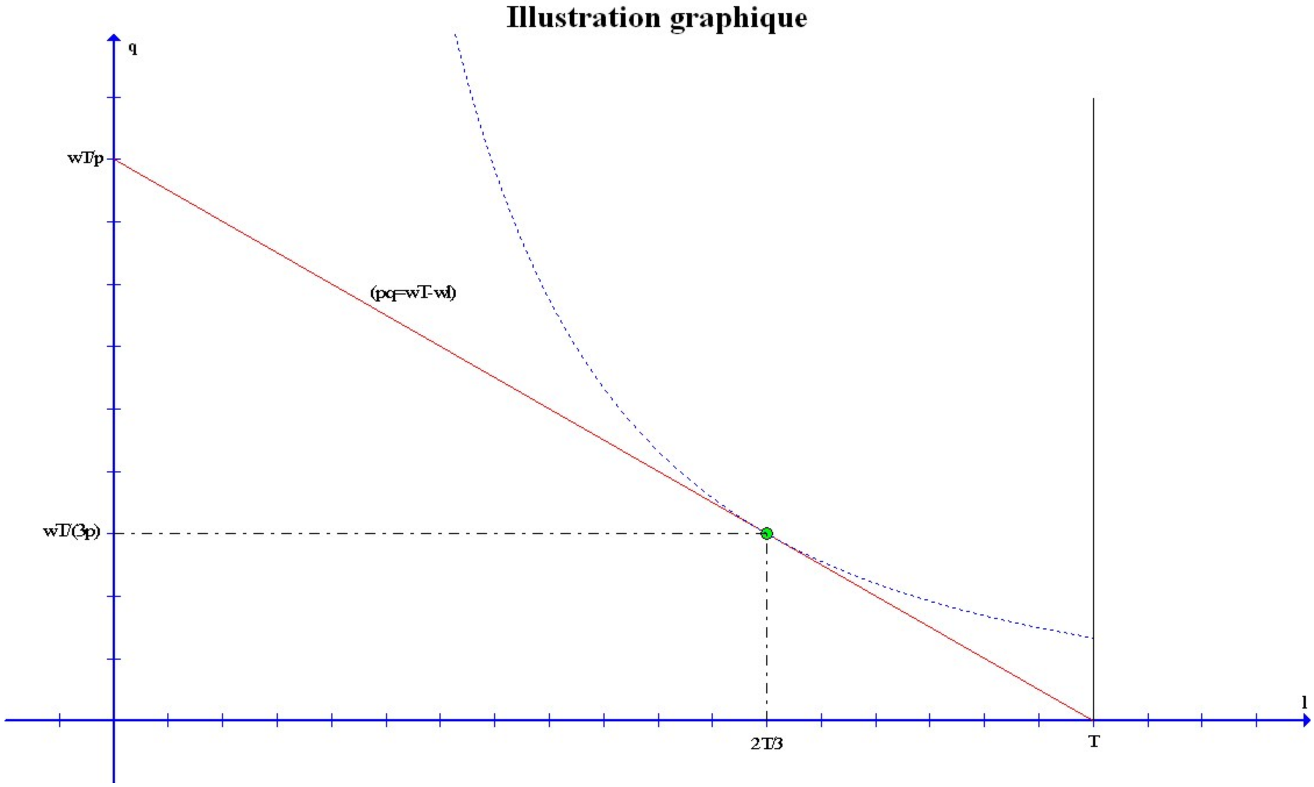
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} pq + wl = wT \\ \frac{l}{2q} = \frac{p}{w} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} pq + wl = wT \\ wl = 2pq \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} pq + 2pq = wT \\ wl = 2pq \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3pq = wT \\ wl = 2pq \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} q = \frac{wT}{3p} \\ wl = 2pq \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} q = \frac{wT}{3p} \\ wl = 2p\frac{wT}{3p} \end{cases} \begin{cases} q = \frac{wT}{3p} \\ l = \frac{2}{3}T \end{cases}$$

On peut donc en tirer l'expression de l'offre de travail :

$$L = T - l = T - \frac{2}{3}T = \frac{1}{3}T$$

Question 2.4 (1,5)



Exercice 3 (3 points)

L'utilité marginale du bien i est $Um_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$. Soit un individu dont la fonction d'utilité est $U(q_1;q_2) = q_1^{\alpha} q_2^{\beta}$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Question 3.1 (1)

Les utilités marginales associées aux deux biens sont :

$$Um_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = \alpha q_1^{\alpha-1} q_2^{\beta}$$

$$Um_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = \beta q_1^{\alpha} q_2^{\beta-1}$$

Question 3.2 (2)

Pour étudier la montonie des utilités marginales, calculons les dérivées secondes :

$$\frac{\partial Um_1}{\partial q_1} = \alpha\left(\alpha - 1\right) q_1^{\alpha-2} q_2^{\beta}$$

$$\frac{\partial Um_2}{\partial q_2} = \beta\left(\beta - 1\right) q_1^{\alpha} q_2^{\beta-2}$$

On peut alors distinguer trois cas :
– Si $\alpha < 1$ et $\beta < 1$, alors :

$$\frac{\partial Um_1}{\partial q_1} < 0$$

$$\frac{\partial Um_2}{\partial q_2} < 0$$

Les utilités marginales sont alors décroissantes.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, alors :

$$\frac{\partial Um_1}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial Um_2}{\partial q_2} = 0$$

Les utilités marginales sont alors constantes.
- Si $\alpha > 1$ et $\beta > 1$, alors :

$$\frac{\partial Um_1}{\partial q_1} > 0$$

$$\frac{\partial Um_2}{\partial q_2} > 0$$

Les utilités marginales sont alors croissantes.

Exercice 4 (2 points)

Soit deux individus A et B dont les dotations initiales en biens 1 et 2 sont respectivement $(8;2)$ et $(2;8)$. Ces deux individus ont la même fonction d'utilité $U(q_1;q_2) = q_1 q_2$ avec q_1 la quantité consommée de bien 1 et q_2 la quantité consommée de bien 2.

Question 4.1 (1)

Soit $U^i(q_1;q_2)$ la fonction d'utilité associée à la relation de préférence de l'individu i.
Evaluons les fonctions d'utilité de nos deux individus aux points de dotations initiales :

$$U^A(8;2) = 8 * 2 = 16$$

$$U^B(2;8) = 2 * 8 = 16$$

Imaginons maintenant que l'individu A donne une unité de bien 1 à l'individu B en échange d'une unité de bien 2. Les dotations sont alors $(7;3)$ et $(3;7)$. Evaluons les fonctions d'utilité de nos deux individus pour ces dotations :

$$U^A(7;3) = 7 * 3 = 21$$

$$U^B(3;7) = 3 * 7 = 21$$

On observe que :

$$U^A(7;3) > U^A(8;2)$$

$$U^B(3;7) > U^B(2;8)$$

Nous avons donc trouvé au moins une façon d'échanger qui accroît l'utilité des deux individus à la fois. Ils ont donc intérêt à échanger.

Question 4.2 (1)