Macroéconomie
M1 : Paris 1 / ENS Cachan
Travaux Dirigés 2010-2011
Interrogation écrite N°1 - Corrigé

Marc Sangnier - marc.sangnier@ens-cachan.fr

Lundi 21 février 2011

Durée : 1h30
Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.

Exercice 1 - Investissement et q de Tobin

Soit une entreprise dont l'horizon temporel est infini. Le prix du bien produit et celui du bien capital sont supposés égaux à l'unité. À chaque date t, l'entreprise produit et vend une quantité Y_t à l'aide de la fonction de production $Y_t = A_t K_t$, où K_t est le stock de capital et A_t la productivité du capital. En fin de période, l'entreprise investit I_t pour accroître son stock de capital selon la relation $K_{t+1} = K_t + I_t$ (il n'y a donc pas de dépréciation du capital). L'entreprise dispose d'un stock de capital initial K_0 et a accès à un marché financier parfait sur lequel les fonds s'échangent au taux d'intérêt réel constant r. La mise en place de l'investissement I_t entraîne un coût d'ajustement $C(I_t; K_t)$, avec $C(0; K_t) = 0$, $\partial C(0; K_t)/\partial I = 0$, $\partial^2 C(I_t; K_t)/\partial^2 I > 0$, $\partial C(I_t; K_t)/\partial K \leq 0$ et $C(-I_t; K_t) = C(I_t; K_t)$.

Question 1 — 1 point

Interprétez la forme de la fonction de coût d'ajustement du capital.

Pour un stock de capital K_t fixé, le coût d'ajustement est une fonction convexe de l'investissement, nul en lorsque l'investissement est nul et positif pour tout $I_t \neq 0$: tout ajustement du stock de capital est coûteux, que ce soit une augmentation ou une diminution. Enfin, (dés)investir une quantité I_t est moins coûteux lorsque le stock de capital en place est déjà important : c'est la taille relative de l'investissement (par rapport à celle de l'entreprise) qui compte.

Question 2

Écrivez le programme de la firme. — 0,5 point

Le programme de l'entreprise s'écrit :

$$max_{\{K_t\}t\geq 1, \{I_t\}t\geq 0} \quad \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \{A_t K_t - I_t - C(I_t; K_t)\},$$
$$sc \quad K_{t+1} = K_t + I_t, \quad \forall t \geq 0.$$

Question 3 1 point

Écrivez le Lagrangien associé à ce problème d'optimisation. Déterminez les conditions du premier ordre.

Le Lagrangien associé à ce problème s'écrit :

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \{A_t K_t - I_t - C(I_t; K_t)\} + \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^t} q_t [K_t + I_t - K_{t+1}].$$

Les conditions du premier ordre par rapport à K_t et I_t sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} = 0 &\Longleftrightarrow \frac{1}{(1+r)^t}\left(A_t - \frac{\partial C(I_t; K_t)}{\partial K}\right) + \frac{1}{(1+r)^t} q_t - \frac{1}{(1+r)^{t-1}} q_{t-1} = 0 \\
&\Longleftrightarrow A_t - \frac{\partial C(I_t; K_t)}{\partial K} + q_t - (1+r) q_{t-1} = 0 \\
&\Longleftrightarrow q_t = \frac{1}{1+r}\left\{A_{t+1} - \frac{\partial C(I_{t+1}; K_{t+1})}{\partial K} + q_{t+1}\right\}, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} = 0 &\Longleftrightarrow \frac{1}{(1+r)^t}\left\{-1 - \frac{\partial C(I_t; K_t)}{\partial I}\right\} + \frac{1}{(1+r)^t} q_t \\
&\Longleftrightarrow \frac{\partial C(I_t; K_t)}{\partial I} = q_t - 1.
\end{aligned}$$

Question 4 1 point

Montrez que le multiplicateur de Lagrange associé à la loi d'accumulation du capital peut s'écrire :

$$q_t = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\left[A_{t+s} - \frac{\partial C(I_{t+s}; K_{t+s})}{\partial K}\right].$$

On appelle cette expression le q de Tobin. Commentez cette expression.

En reprenant la première condition du premier ordre en en développant vers le futur, il vient :

$$\begin{aligned}
q_t =& \frac{1}{1+r}\left\{A_{t+1} - \frac{\partial C(I_{t+1}; K_{t+1})}{\partial K} + q_{t+1}\right\} \\
=& \frac{1}{1+r}\left\{A_{t+1} - \frac{\partial C(I_{t+1}; K_{t+1})}{\partial K} + \frac{1}{1+r}\left\{A_{t+2} - \frac{\partial C(I_{t+2}; K_{t+2})}{\partial K} + q_{t+2}\right\}\right\} \\
=& \frac{1}{1+r}\left\{A_{t+1} - \frac{\partial C(I_{t+1}; K_{t+1})}{\partial K}\right\} + \frac{1}{(1+r)^2}\left\{A_{t+2} - \frac{\partial C(I_{t+2}; K_{t+2})}{\partial K}\right\} + \frac{1}{(1+r)^2} q_{t+2} \\
=& \frac{1}{1+r}\left\{A_{t+1} - \frac{\partial C(I_{t+1}; K_{t+1})}{\partial K}\right\} + \frac{1}{(1+r)^2}\left\{A_{t+2} - \frac{\partial C(I_{t+2}; K_{t+2})}{\partial K}\right\} \\
&+ \frac{1}{(1+r)^2}\frac{1}{1+r}\left\{A_{t+3} - \frac{\partial C(I_{t+3}; K_{t+3})}{\partial K} + q_{t+3}\right\} \\
=& \frac{1}{1+r}\left\{A_{t+1} - \frac{\partial C(I_{t+1}; K_{t+1})}{\partial K}\right\} + \frac{1}{(1+r)^2}\left\{A_{t+2} - \frac{\partial C(I_{t+2}; K_{t+2})}{\partial K}\right\} \\
&+ \frac{1}{(1+r)^3}\left\{A_{t+3} - \frac{\partial C(I_{t+3}; K_{t+3})}{\partial K}\right\} + \frac{1}{(1+r)^3} q_{t+3} \\
=& \quad \textit{etc.}
\end{aligned}$$

En raisonnant de proche en proche, on montre facilement que :

$$q_t = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\left[A_{t+s} - \frac{\partial C(I_{t+s}; K_{t+s})}{\partial K}\right].$$

q_t est la valeur actualisée que rapporte une unité d'investissement en t. Cette valeur se décompose en deux termes à chaque date $t+s$: A_{t+s} est la productivité marginale du capital, $-\partial C\left(I_{t+s};K_{t+s}\right)/\partial K \geq 0$ est la réduction du coût d'ajustement lorsque l'entreprise est plus grosse (car l'ajustement futur est plus petit relativement à la taille de l'entreprise).

Question 5 1,5 point

Déterminez le lien entre l'investissement et le q de Tobin.

Reprenons la seconde condition du premier ordre :

$$\frac{\partial C\left(I_t;K_t\right)}{\partial I} = q_t - 1.$$

Le terme de gauche est le coût marginal du capital. Supposons que $q_t > 1$, c'est à dire $q_t - 1 > 0$. Cela implique qu'à l'optimum l'expression $\partial C\left(I_t;K_t\right)/\partial I$ doit être positive. L'investissement doit donc être positif. De même, si $q_t < 0$, l'investissement doit être négatif, on doit dé-investir. Par ailleurs, compte tenu de l'expression de q_t que nous venons de commenter, il est clair que c'est la valeur actualisée des rendements futurs du capital qui détermine l'investissement courant.

Question 6 1 point

On suppose maintenant que le coût d'ajustement s'écrit :

$$C\left(I_t;K_t\right) = K_t\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right),$$

avec $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 0$ et $\phi'' > 0$. On en déduit facilement :

$$\frac{\partial C\left(I_t;K_t\right)}{\partial K} = \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) - \frac{I_t}{K_t}\phi'\left(\frac{I_t}{K_t}\right) < 0 \quad \text{car la fonction } \phi(.) \text{ est convexe.}$$

On se place donc dans le cas où les rendements d'échelle sont constants (la production est proportionnelle au stock de capital K_t) et les "coûts d'échelle" aussi (coût d'ajustement proportionnel à K_t).

Montrez que la solution du programme de maximisation de est proportionelle à K_0.

Compte tenu de ce qui précède, on sait que la solution optimale vérifie :

$$\frac{\partial C\left(I_t;K_t\right)}{\partial I} + 1 = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\left[A_{t+s} - \frac{\partial C\left(I_{t+s};K_{t+s}\right)}{\partial K}\right], \quad t \geq 0.$$

En utilisant l'expression de $C\left(I_t;K_t\right)$ donnée ici, il vient :

$$\phi'\left(\frac{I_t}{K_t}\right) + 1 = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\left[A_{t+s} - \phi\left(\frac{I_{t+s}}{K_{t+s}}\right) - \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}}\phi'\left(\frac{I_{t+s}}{K_{t+s}}\right)\right], \quad t \geq 0.$$

La solution doit également vérifier la relation $K_{t+1} = K_t + I_t$ pour $t \geq 0$.

Supposons que la quantité K_0 soit multipliée par un constante. On voit alors aisément que les deux conditions seront vérifiées pour tout $t \geq 0$ si tous les I_t, $t \geq 0$ et tous les K_t, $t \geq 1$ sont multipliés par la même constante.

Question 7 1 point

Calculez la valeur V_0 de l'entreprise au début de la période 0 et montrez qu'elle est proportionnelle à K_0.

La valeur de l'entreprise au début de la période 0 *est donnée par la valeur actualisée de l'ensemble des profits futurs qu'elle va engendrer :*

$$V_0 = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[A_t K_t - I_t - K_t \phi \left(\frac{I_t}{K_t} \right) \right].$$

Supposons que l'ensemble des I_t *et* K_t *sont multipliés par une constante* δ*. On a alors :*

$$\begin{aligned} V_0' &= \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[A_t \delta K_t - \delta I_t - \delta K_t \phi \left(\frac{\delta I_t}{\delta K_t} \right) \right] \\ &= \delta \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[A_t K_t - I_t - K_t \phi \left(\frac{I_t}{K_t} \right) \right] \\ &= \delta V_0. \end{aligned}$$

Si tout les I_t *et* K_t *sont multipliés par une constante* δ*, la valeur de l'entreprise l'est aussi. On peut donc en déduire, d'après la question précédente, que la la valeur de l'entreprise est proportionnelle à* K_0*.*

Question 8 1 point

Le multiplicateur de Lagrange mesure de combien la fonction objectif augmente lorsque la contrainte qui lui est associée est relâchée d'une unité. Le q de Tobin est donc égal au rendement marginal du capital, en particulier, pour $t = 0$, on a $q_0 = \partial V_0 / \partial K_0$. En déduire que :

$$q_t = \frac{V_t}{K_t},$$

où V_t est la valeur de la firme au début de la période t.

q_t est la valeur marginale du capital. Or, V_t/K_t est la valeur moyenne du capital. On a donc montré que dans le cas où les rendements d'échelle sont constants et les "coûts d'échelle" aussi. la valeur marginale et la valeur moyenne du capital sont égales.

La question précédente nous permet d'écrire $V_0 = \delta K_0$*, avec* δ *une constante. On en déduit* $\partial V_0 = \delta \partial K_0$ *et donc :*

$$\frac{V_0}{K_0} = \frac{\partial V_0}{\partial K_0}.$$

Or, $q_0 = \partial V_0 / \partial K_0$*, on peut donc écrire :*

$$q_0 = \frac{V_0}{K_0}.$$

Ce raisonnement peut être fait pour n'importe quelle date en décalant l'origine des temps. On en déduit donc :

$$q_t = \frac{V_t}{K_t}.$$

Exercice 2 - Modèle à générations imbriquées

On s'intéresse à une économie dans laquelle chaque agent vit deux périodes. Lorsqu'il est jeune, un agent né en t reçoit un salaire réel w_t, consomme une quantité c_t et dégage une épargne s_t qui sera rémunérée au taux d'intérêt réel r_{t+1} lors de la période suivante. Lorsqu'il est vieux, l'agent ne travaille pas et consomme d_{t+1}. Son utilité intertemporelle est représentée par la fonction suivante :

$$\mathcal{U} = u(c_t) + \beta u(d_{t+1}), \quad \text{avec } 0 < \beta < 1,$$

où $u' > 0$ et $u'' < 0$. Le nombre d'individus qui naissent à la date t est N_t. Le taux de croissance de la population est n.

On suppose que le secteur productif est en situation de concurrence parfaite et utilise une fonction de production à rendements d'échelle constants $Y_t = F(N_t; K_t)$, croissante et concave en N_t et K_t. Il n'y a pas de dépréciation du capital.

Question 1 1 point

Écrire la contrainte budgétaire intertemporelle d'un agent né en t. Donnez le programme d'optimisation d'un agent né en t. Résolvez-le et déduisez-en l'expression suivante :

$$u'(c_t) = \beta(1 + r_{t+1}) u'(d_{t+1}).$$

La contrainte budgétaire de l'agent en première période est :

$$c_t + s_t = w_t.$$

En période âgée, on a :

$$s_t(1 + r_{t+1}) = d_{t+1}.$$

On peut donc en déduire la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t.$$

Le programme de l'agent est de choisir c_t et d_{t+1} afin de maximiser $\mathcal{U}$ sous la contrainte budgétaire intertemporelle. Le Lagrangien associé à ce problème est :

$$\mathcal{L} = u(c_t) + \beta u(d_{t+1}) - \lambda \left\{ c_t + \frac{d_{t+1}}{1 + r_{t+1}} - w_t \right\}.$$

Les deux conditions du premier ordre par rapport à c_t et d_{t+1} s'écrivent :

$$u'(c_t) = \lambda \quad \text{et} \quad \beta u'(d_{t+1}) = \lambda \frac{1}{1 + r_{t+1}}.$$

En faisant disparaître λ, on obtient immédiatement l'équation d'Euler :

$$u'(c_t) = \beta(1 + r_{t+1}) u'(d_{t+1}).$$

Question 2 0,5 point

Ré-écrivez l'expression précédente à l'aide de s_t. Par la suite, on notera $s(w_t; r_{t+1})$ la solution de cette équation.

En utilisant les contraintes budgétaires en période de jeunesse et de vieillesse, on peut réécrire l'équation d'Euler de la façon suivante :

$$u'(w_t - s_t) = \beta(1 + r_{t+1}) u'((1 + r_{t+1}) s_t).$$

Question 3 1,5 point

Supposons que la fonction $u(.)$ est de la forme :

$$u(c) = \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \sigma > 0, \, \sigma \neq 1,$$

où σ est l'élasticité de substitution intertemporelle. Déterminez $s(w_t; r_{t+1})$ et discutez de l'effet du taux d'intérêt sur l'épargne.

On obtient :

$$\begin{aligned}
(w_t - s_t)^{-\frac{1}{\sigma}} =& \beta (1 + r_{t+1}) ((1 + r_{t+1}) s_t)^{-\frac{1}{\sigma}} \\
\Longleftrightarrow (w_t - s_t) =& \beta^{-\sigma} (1 + r_{t+1})^{-\sigma} (1 + r_{t+1}) s_t \\
\Longleftrightarrow (w_t - s_t) =& \beta^{-\sigma} (1 + r_{t+1})^{1-\sigma} s_t \\
\Longleftrightarrow w_t =& \left[\beta^{-\sigma} (1 + r_{t+1})^{1-\sigma} + 1\right] s_t \\
\Longleftrightarrow s(w_t; r_{t+1}) =& \frac{w_t}{\left[\beta^{-\sigma} (1 + r_{t+1})^{1-\sigma} + 1\right]}.
\end{aligned}$$

Si l'on dérive cette expression par rapport à r_{t+1}, il vient :

$$\frac{\partial s(w_t; r_{t+1})}{\partial r_{t+1}} = \frac{w_t \beta^{-\sigma} (1-\sigma) (1 + r_{t+1})^{-\sigma}}{\left[\beta^{-\sigma} (1 + r_{t+1})^{1-\sigma} + 1\right]^2}.$$

Le signe de cette expression dépend du signe de $1 - \sigma$.

Le taux d'intérêt a deux effets opposés sur l'épargne. Lorsqu'il augmente, cela réduit le prix du bien à la période $t+1$ relativement au prix du bien à la période t, ce qui amène l'agent à davantage consommer en seconde période, c'est à-dire à accroître son épargne (effet substitution). Cela réduit également le prix du bien à la période $t+1$ en termes absolus, tandis que le prix du bien à la période t est inchangé, donc l'agent est plus riche (l'agent est ici emprunteur net) et veut davantage consommer à chaque période, ce qui tend à réduire l'épargne (effet revenu).

Lorsque les agents ont une forte préférence pour lisser leur consommation au cours du temps (faible élasticité de substitution intertemporelle, $\sigma < 1$), l'effet revenu domine et une augmentation du taux d'intérêt réduit l'épargne. A l'inverse, si l'élasticité de substitution intertemporelle est forte, $\sigma > 1$, l'effet substitution domine et une augmentation du taux d'intérêt augmente l'épargne.

Question 4 1 point

Écrire le programme de l'entreprise représentative. En déduire r_t et w_t en fonction du stock de capital par tête $k_t = K_t/L_t$. On notera ces valeurs $r(k_t)$ et $w(k_t)$. On définira par ailleurs la fonction $f(.)$ de la façon suivante : $f(k_t) \equiv F(1; k_t)$.

L'objectif de l'entreprise est de choisir K_t et L_t afin de maximiser son profit :

$$\pi = F(L_t; K_t) - w_t L_t - r_t K_t.$$

Le profit par tête peut s'écrire :

$$\frac{\pi}{L_t} = f(k_t) - w_t - r_t k_t.$$

L'entreprise choisit alors k_t. La condition du premier ordre correspondante est alors :

$$r_t = f'(k_t) \equiv r(k_t).$$

Comme le profit est nul à l'équilibre concurrentiel, on en déduit :

$$w_t = f(k_t) - f'(k_t) k_t \equiv w(k_t).$$

Question 5 1 point

A l'équilibre sur le marché du capital pour la période t, l'épargne des ménages, $N_t s_t$, est égale à la demande de capital des entreprises, K_{t+1}. Montrez que la loi d'évolution du stock de capital par tête peut s'écrire :

$$(1+n)\,k_{t+1} = s\left[w\left(k_t\right); r\left(k_{t+1}\right)\right].$$

L'équilibre du marché du capital s'écrit :

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= N_t s_t \\ \Longleftrightarrow K_{t+1} &= N_t s\left(w_t; r_{t+1}\right) \\ \Longleftrightarrow \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} &= \frac{N_t}{N_{t+1}} s\left(w_t; r_{t+1}\right) \\ \Longleftrightarrow k_{t+1} &= \frac{1}{1+n} s\left[w\left(k_t\right); r\left(k_{t+1}\right)\right] \\ \Longleftrightarrow (1+n)\,k_{t+1} &= s\left[w\left(k_t\right); r\left(k_{t+1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Question 6 0,5 point

Quelle relation le capital par tête à l'état stationnaire,k^*, doit-il vérifier ?

Le capital par tête à l'état stationnaire,k^*, doit vérifier la relation suivante :

$$(1+n)\,k^* = s\left[w\left(k^*\right); r\left(k^*\right)\right].$$

Question 7 0,5 point

Supposons que la fonction $u\,(.)$ est de la forme :

$$u\,(c) = ln\,(c) \quad \text{(cas où } \sigma = 1\text{)},$$

et que la fonction de production est

$$F\left(K_t; N_t\right) = K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1.$$

Déterminez k^*.

En reprenant l'équation d'Euler écrite à l'aide de l'épargne, il vient :

$$\beta\left(1+r_{t+1}\right) u'\left(\left(1+r_{t+1}\right) s_t\right).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_t - s_t} &= \beta\left(1+r_{t+1}\right)\frac{1}{\left(1+r_{t+1}\right) s_t} \\ \Longleftrightarrow s_t &= \frac{w_t}{1+\beta^{-1}}. \end{aligned}$$

La fonction de production par tête s'écrit :

$$f\left(k_t\right) = k_t^{\alpha}.$$

On peut en déduire :

$$r\left(k_t\right) = \alpha k_t^{\alpha-1},$$

et

$$w\left(k_t\right) = k_t^{\alpha} - \alpha k_t^{\alpha} = k_t^{\alpha}\left(1-\alpha\right).$$

Le capital par tête à l'état stationnaire,k^**, doit vérifier la relation suivante :*

$$\begin{aligned}(1+n)\,k^* &= \frac{(k^*)^\alpha\,(1-\alpha)}{1+\beta^{-1}}\\ \Longleftrightarrow (k^*)^{1-\alpha} &= \frac{1-\alpha}{(1+\beta^{-1})\,(1+n)}\\ \Longleftrightarrow k^* &= \left\{\frac{1-\alpha}{(1+\beta^{-1})\,(1+n)}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}.\end{aligned}$$

Exercice 3 - Retraite par capitalisation obligatoire

On s'intéresse à une économie dans laquelle les agents vivent deux périodes (modèle à générations imbriquées). Le nombre d'individus né à la date t est N_t. En période de jeunesse, les agents perçoivent un revenu w_t, consomment une quantité c_t et épargnent un montant e_t déterminé librement. En période de vieillesse, les individus consomment d_{t+1} et perçoivent le fruit de leur épargne. Il existe une retraite par capitalisation obligatoire financée de la façon suivante : lorsqu'ils sont jeunes les individus sont taxés sur leur revenu w_t au taux τ, l'état place ce montant sur un marché financier au taux r supposé constant et leur reverse la somme initiale augmentée des intérêts lorsque les agents sont vieux. L'utilité intertemporelle d'un agent né à la date t est représentée par la fonction suivante :

$$\mathcal{U} = ln\left(c_t\right) + \frac{1}{1+\rho} ln\left(d_{t+1}\right).$$

Question 1 1 point

Déterminez la consommation optimale d'un ménage jeune en fonction de w_t. En déduire l'épargne privée optimale.

La contrainte budgétaire d'un ménage jeune est :

$$c_t + e_t = (1-\tau)\, w_t.$$

Celle d'un ménage âgé est :

$$d_{t+1} = (1+r)\left(e_t + \tau w_t\right).$$

On en déduit la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r} = w_t.$$

Le Lagrangien correspondant au programme d'un agent né en t est :

$$\mathcal{L} = ln\left(c_t\right) + \frac{1}{1+\rho} ln\left(d_{t+1}\right) - \lambda \left\{ c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r} - w_t \right\}.$$

Les conditions du premier ordre par rapport à c_t et d_{t+1} donnent :

$$\frac{1}{c_t} = \lambda \quad et \quad \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{d_{t+1}} = \lambda \frac{1}{1+r}.$$

On en déduit immédiatement :

$$d_{t+1} = \frac{1+r}{1+\rho} c_t.$$

En réutilisant la contrainte budgétaire intertemporelle, il vient :

$$\begin{aligned} c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r} &= w_t \\ \Longleftrightarrow c_t + \frac{1}{1+\rho} c_t &= w_t \\ \Longleftrightarrow c_t &= \frac{1+\rho}{2+\rho} w_t. \end{aligned}$$

L'épargne privée est donc :

$$\begin{aligned} e_t &= (1-\tau)\, w_t - c_t \\ &= (1-\tau)\, w_t - \frac{1+\rho}{2+\rho} w_t \\ &= \left(1 - \tau - \frac{1+\rho}{2+\rho}\right) w_t. \end{aligned}$$

Question 2 1 point

Donnez l'expression de D_t, le montant placé sur le marché financier à la date t (la demande de titres).

Le montant placé se compose de l'épargne privée de chaque individu et de l'épargne forcée :

$$\begin{aligned} D_t &= N_t \left(e_t + \tau w_t \right) \\ &= N_t \left[\left(1 - \tau - \frac{1+\rho}{2+\rho} \right) w_t + \tau w_t \right] \\ &= N_t \left(1 - \frac{1+\rho}{2+\rho} \right) w_t \\ &= N_t \frac{1}{2+\rho} w_t. \end{aligned}$$

Question 3 1 point

Donnez l'expression de O_t, la quantité de titres retirés du marché financier à la date t (l'offre de titres).

Les titres retirés à la date t sont ceux qui ont été placés à la date $t-1$:

$$\begin{aligned} O_t &= D_{t-1} \\ &= N_{t-1} \frac{1}{2+\rho} w_{t-1}. \end{aligned}$$

Question 4 1 point

Expliquez pourquoi la condition d'équilibre sur le marché des titres s'écrit :

$$\left(1 + r \right) O_t = D_t.$$

Les titres retirés doivent avoir été rémunéré au taux d'intérêt r qui égalise offre et demande de titres. Une autre façon de lire cette égalité est que le demande de titre doit être suffisamment importante que pour les porteurs de titres soient rémunérés au taux r.

Question 5 1 point

En supposant que le taux de croissance de la population est constant et égal à n et que le taux de croissance de la productivité du travail est également constant et égal à g, déterminez le taux d'intérêt d'équilibre.

En utilisant les expressions précédentes, il vient

$$\begin{aligned} & \left(1 + r \right) O_t = D_t \\ \iff & \left(1 + r \right) N_{t-1} \frac{1}{2+\rho} w_{t-1} = N_t \frac{1}{2+\rho} w_t \\ \iff & \left(1 + r \right) = \frac{N_t}{N_{t-1}} \frac{w_t}{w_{t-1}}. \end{aligned}$$

Or, comme $w_t = \left(1 + g \right) w_{t-1}$ et $N_t = \left(1 + n \right) N_{t-1}$, on obtient :

$$\left(1 + r \right) = \left(1 + n \right) \left(1 + g \right).$$

Question 6 1 point

Commentez.

On s'aperçoit que si l'on prend en compte l'équilibre sur le marché financier, alors le taux d'intérêt est égal au taux de croissance de la population multiplié par le taux de croissance de la productivité du travail. Or, $(1+n)(1+g)$ *est le rendement théorique d'un système de retraite par répartition. Dès lors, ce résultat montre que, la retraite par capitalisation n'est pas plus avantageuse que la retraite pas répartition si l'on tient compte des effets d'équilibre général.*
