Macroéconomie
M1 : Paris 1 / ENS Cachan
Travaux Dirigés 2010-2011
Interrogation écrite N°1

Marc Sangnier - marc.sangnier@ens-cachan.fr

Lundi 21 février 2011

Durée : 1h30
Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.

Exercice 1 - Investissement et q de Tobin

Soit une entreprise dont l'horizon temporel est infini. Le prix du bien produit et celui du bien capital sont supposés égaux à l'unité. À chaque date t, l'entreprise produit et vend une quantité Y_t à l'aide de la fonction de production $Y_t = A_t K_t$, où K_t est le stock de capital et A_t la productivité du capital. En fin de période, l'entreprise investit I_t pour accroître son stock de capital selon la relation $K_{t+1} = K_t + I_t$ (il n'y a donc pas de dépréciation du capital). L'entreprise dispose d'un stock de capital initial K_0 et a accès à un marché financier parfait sur lequel les fonds s'échangent au taux d'intérêt réel constant r. La mise en place de l'investissement I_t entraîne un coût d'ajustement $C(I_t; K_t)$, avec $C(0; K_t) = 0$, $\partial C(0; K_t)/\partial I = 0$, $\partial^2 C(I_t; K_t)/\partial^2 I > 0$, $\partial C(I_t; K_t)/\partial K \leq 0$ et $C(-I_t; K_t) = C(I_t; K_t)$.

Question 1 1 point

Interprétez la forme de la fonction de coût d'ajustement du capital.

Question 2

Écrivez le programme de la firme. 0,5 point

Question 3 1 point

Écrivez le Lagrangien associé à ce problème d'optimisation. Déterminez les conditions du premier ordre.

Question 4 1 point

Montrez que le multiplicateur de Lagrange associé à la loi d'accumulation du capital peut s'écrire :

$$q_t = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[A_{t+s} - \frac{\partial C(I_{t+s}; K_{t+s})}{\partial K} \right].$$

On appelle cette expression le q de Tobin. Commentez cette expression.

Question 5 1,5 point

Déterminez le lien entre l'investissement et le q de Tobin.

Question 6 1 point

On suppose maintenant que le coût d'ajustement s'écrit :

$$C\left(I_t;K_t\right) = K_t \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right),$$

avec $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 0$ et $\phi'' > 0$. On en déduit facilement :

$$\frac{\partial C\left(I_t;K_t\right)}{\partial K} = \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) - \frac{I_t}{K_t}\phi'\left(\frac{I_t}{K_t}\right) < 0 \quad \text{car la fonction } \phi\left(.\right) \text{ est convexe.}$$

On se place donc dans le cas où les rendements d'échelle sont constants (la production est proportionnelle au stock de capital K_t) et les "coûts d'échelle" aussi (coût d'ajustement proportionnel à K_t).

Montrez que la solution du programme de maximisation de est proportionelle à K_0.

Question 7 1 point

Calculez la valeur V_0 de l'entreprise au début de la période 0 et montrez qu'elle est proportionnelle à K_0.

Question 8 1 point

Le multiplicateur de Lagrange mesure de combien la fonction objectif augmente lorsque la contrainte qui lui est associée est relâchée d'une unité. Le q de Tobin est donc égal au rendement marginal du capital, en particulier, pour $t = 0$, on a $q_0 = \partial V_0 / \partial K_0$. En déduire que :

$$q_t = \frac{V_t}{K_t},$$

où V_t est la valeur de la firme au début de la période t.

q_t est la valeur marginale du capital. Or, V_t / K_t est la valeur moyenne du capital. On a donc montré que dans le cas où les rendements d'échelle sont constants et les "coûts d'échelle" aussi. la valeur marginale et la valeur moyenne du capital sont égales.

Exercice 2 - Modèle à générations imbriquées

On s'intéresse à une économie dans laquelle chaque agent vit deux périodes. Lorsqu'il est jeune, un agent né en t reçoit un salaire réel w_t, consomme une quantité c_t et dégage une épargne s_t qui sera rémunérée au taux d'intérêt réel r_{t+1} lors de la période suivante. Lorsqu'il est vieux, l'agent ne travaille pas et consomme d_{t+1}. Son utilité intertemporelle est représentée par la fonction suivante :

$$\mathcal{U} = u(c_t) + \beta u(d_{t+1}), \quad \text{avec } 0 < \beta < 1,$$

où $u' > 0$ et $u'' < 0$. Le nombre d'individus qui naissent à la date t est N_t. Le taux de croissance de la population est n.

On suppose que le secteur productif est en situation de concurrence parfaite et utilise une fonction de production à rendements d'échelle constants $Y_t = F(N_t; K_t)$, croissante et concave en N_t et K_t. Il n'y a pas de dépréciation du capital.

Question 1 — 1 point

Écrire la contrainte budgétaire intertemporelle d'un agent né en t. Donnez le programme d'optimisation d'un agent né en t. Résolvez-le et déduisez-en l'expression suivante :

$$u'(c_t) = \beta(1 + r_{t+1}) u'(d_{t+1}).$$

Question 2 — 0,5 point

Ré-écrivez l'expression précédente à l'aide de s_t. Par la suite, on notera $s(w_t; r_{t+1})$ la solution de cette équation.

Question 3 — 1,5 point

Supposons que la fonction $u(.)$ est de la forme :

$$u(c) = \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \sigma > 0,\, \sigma \neq 1,$$

où σ est l'élasticité de substitution intertemporelle. Déterminez $s(w_t; r_{t+1})$ et discutez de l'effet du taux d'intérêt sur l'épargne.

Question 4 — 1 point

Écrire le programme de l'entreprise représentative. En déduire r_t et w_t en fonction du stock de capital par tête $k_t = K_t/L_t$. On notera ces valeurs $r(k_t)$ et $w(k_t)$. On définira par ailleurs la fonction $f(.)$ de la façon suivante : $f(k_t) \equiv F(1; k_t)$.

Question 5 — 1 point

A l'équilibre sur le marché du capital pour la période t, l'épargne des ménages, $N_t s_t$, est égale à la demande de capital des entreprises, K_{t+1}. Montrez que la loi d'évolution du stock de capital par tête peut s'écrire :

$$(1 + n) k_{t+1} = s[w(k_t); r(k_{t+1})].$$

Question 6 — 0,5 point

Quelle relation le capital par tête à l'état stationnaire,k^*, doit-il vérifier ?

Question 7 — 0,5 point

Supposons que la fonction $u(.)$ est de la forme :

$$u(c) = ln(c) \quad (\text{cas où } \sigma = 1),$$

et que la fonction de production est

$$F(K_t; N_t) = K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1.$$

Déterminez k^*.

Exercice 3 - Retraite par capitalisation obligatoire

On s'intéresse à une économie dans laquelle les agents vivent deux périodes (modèle à générations imbriquées). Le nombre d'individus né à la date t est N_t. En période de jeunesse, les agents perçoivent un revenu w_t, consomment une quantité c_t et épargnent un montant e_t déterminé librement. En période de vieillesse, les individus consomment d_{t+1} et perçoivent le fruit de leur épargne. Il existe une retraite par capitalisation obligatoire financée de la façon suivante : lorsqu'ils sont jeunes les individus sont taxés sur leur revenu w_t au taux τ, l'état place ce montant sur un marché financier au taux r supposé constant et leur reverse la somme initiale augmentée des intérêts lorsque les agents sont vieux. L'utilité intertemporelle d'un agent né à la date t est représentée par la fonction suivante :

$$\mathcal{U} = ln\left(c_t\right) + \frac{1}{1+\rho} ln\left(d_{t+1}\right).$$

Question 1 1 point

Déterminez la consommation optimale d'un ménage jeune en fonction de w_t. En déduire l'épargne privée optimale.

Question 2 1 point

Donnez l'expression de D_t, le montant placé sur le marché financier à la date t (la demande de titres).

Question 3 1 point

Donnez l'expression de O_t, la quantité de titres retirés du marché financier à la date t (l'offre de titres).

Question 4 1 point

Expliquez pourquoi la condition d'équilibre sur le marché des titres s'écrit :

$$(1+r)\,O_t = D_t.$$

Question 5 1 point

En supposant que le taux de croissance de la population est constant et égal à n et que le taux de croissance de la productivité du travail est également constant et égal à g, déterminez le taux d'intérêt d'équilibre.

Question 6 1 point

Commentez.