Macroéconomie
Paris 1 / ENS Cachan
Travaux Dirigés 2009-2010
Interrogation écrite N°3 - Corrigé

Marc Sangnier - marc.sangnier@ens-cachan.fr

Mercredi 5 mai 2010

Exercice

L'objet de cet exercice est de retrouver les différentes étapes qui permettent d'aller de la concurrence imparfaite au modèle de Taylor.

Modèle de concurrence imparfaite avec coûts de catalogue

L'économie est constituée d'un continuum d'agents indicés par i, $i \in [0,1]$. Chaque agent produit un bien différencié à partir de son propre travail. Ce bien est vendu en situation de monopole. L'agent i consomme une quantité C_i formée de l'ensemble des biens et donnée par

$$C_i = \left(\int_0^1 C_{ij}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \, dj \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

avec $\varepsilon > 1$. La fonction d'utilité de l'agent i est données par

$$U_i = C_i - \frac{\varepsilon - 1}{\gamma\varepsilon} L_i^{\gamma} - D_i z,$$

où z représente un coût d'ajustement si l'agent modifie son prix de vente, i.e., si $D_i = 1$ ($D_i = 0$ si aucun ajustement n'a lieu). On a aussi $\gamma > 1$. On suppose enfin qu'une unité de travail permet de donner une unité de bien. La fonction de production est donc

$$Y_i = L_i.$$

Question 1

On suppose dans un premier temps que le revenu de l'agent est simplement donné par R. Chaque agent choisit la composition optimale de son panier de consommation. Montrez que la demande de bien j s'écrit

$$Y_j^D = \left(\frac{P_j}{P}\right)^{-\varepsilon} C,$$

avec

$$P = \left(\int_0^1 P_j^{1-\varepsilon} dj\right)^{1/(1-\varepsilon)},$$

l'indice des prix et

$$C = \int_0^1 C_i di,$$

la consommation agrégée.

Le Lagrangien correspondant au programme de l'agent i s'écrit

$$\mathcal{L} = C_i - \frac{\varepsilon - 1}{\gamma\varepsilon} L_i^{\gamma} - D_i z + \lambda \left[R - \int_0^1 P_j C_{ij} dj\right].$$

La condition du premier ordre s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{ij}} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} C_{ij}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}-1} \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \left(\int_0^1 C_{ij}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} - \lambda P_j = 0$$

$$\iff C_{ij}^{\frac{-1}{\varepsilon}} \left(\int_0^1 C_{ij}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda P_j.$$

En prenant deux biens j et k, on peut former le rapport de l'expression précédente, il vient alors

$$\frac{C_{ij}^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{C_{ik}^{\frac{-1}{\varepsilon}}} == \frac{P_j}{P_k}$$

$$\iff P_k^{1-\varepsilon} C_{ij}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = P_j^{1-\varepsilon} C_{ik}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}.$$

En intégrant sur k entre 0 et 1, il vient

$$C_{ij}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \int_0^1 P_k^{1-\varepsilon} dk = P_j^{1-\varepsilon} \int_0^1 C_{ik}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dk$$

$$\iff C_{ij}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} P^{1-\varepsilon} = P_j^{1-\varepsilon} C_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\Longleftrightarrow C_{ij}\left(\frac{P}{P_j}\right)^{-\varepsilon} = C_i.$$

En intégrant sur i entre 0 et 1, il vient

$$\left(\frac{P}{P_j}\right)^{-\varepsilon}\int_0^1 C_{ij}di = \int_0^1 C_i di$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{P}{P_j}\right)^{-\varepsilon} Y_j^D = C$$

$$\Longleftrightarrow Y_j^D = \left(\frac{P_j}{P}\right)^{-\varepsilon} C.$$

Question 2

Le revenu de l'agent i est composé de ses ventes $\left(P_i Y_i^D\right)$ et est dépensé en biens de consommation (PC_i). On suppose que la monnaie est uniquement utilisée pour effectuer des transactions sur le marché des biens. Ainsi, les encaisses monétaires sont telles que $M = PC$. En tenant compte du fait que l'agent connaît la fonction de demande trouvée à la question précédente, réécrivez l'utilité de l'agent i à l'aide des variables M, P, D_i, P_i et des paramètres ε, γ et z.

L'utilité de l'agent i est

$$U_i = C_i - \frac{\varepsilon - 1}{\gamma\varepsilon} L_i^\gamma - D_i z.$$

On sait que $C_i = P_i Y_i^D / P$ et $C = M/P$. Par ailleurs, l'agent produit la quantité demandée à l'aide de la fonction de production $L_i = Y_i$. On peut donc écrire

$$U_i = \frac{P_i}{P} Y_i^D - \frac{\varepsilon - 1}{\gamma\varepsilon}\left(\left(\frac{P_j}{P}\right)^{-\varepsilon} C\right)^\gamma - D_i z$$

$$\Longleftrightarrow U_i = \frac{P_i}{P}\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\varepsilon} C - \frac{\varepsilon - 1}{\gamma\varepsilon}\left(\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\varepsilon} C\right)^\gamma - D_i z$$

$$\Longleftrightarrow U_i = \frac{P_i}{P}\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\varepsilon} \frac{M}{P} - \frac{\varepsilon - 1}{\gamma\varepsilon}\left(\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\varepsilon} \frac{M}{P}\right)^\gamma - D_i z$$

$$\Longleftrightarrow U_i = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{1-\varepsilon} \frac{M}{P} - \frac{\varepsilon - 1}{\gamma\varepsilon}\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\gamma\varepsilon}\left(\frac{M}{P}\right)^\gamma - D_i z.$$

Question 3

Déterminez le prix optimal P_i^* choisit par l'agent i pour maximiser son profit. On appelle P_i^* le prix flexible optimal. On posera par ailleurs

$$\phi = \frac{\gamma - 1}{\gamma\varepsilon - \varepsilon + 1}.$$

On cherche le prix P_i^* qui maximise l'expression

$$U_i = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{1-\varepsilon} \frac{M}{P} - \frac{\varepsilon - 1}{\gamma\varepsilon} \left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\gamma\varepsilon} \left(\frac{M}{P}\right)^{\gamma} - D_i z.$$

La condition du premier ordre s'écrit

$$(\varepsilon - 1) \frac{M}{P} P^{\varepsilon-1} P_i^{-\varepsilon} = \gamma\varepsilon \frac{\varepsilon - 1}{\gamma\varepsilon} \left(\frac{M}{P}\right)^{\gamma} P_i^{-\gamma\varepsilon-1} P^{\gamma\varepsilon}$$

$$\iff MP^{\varepsilon-2} P_i^{-\varepsilon} = M^{\gamma} P^{-\gamma} P_i^{-\gamma\varepsilon-1} P^{\gamma\varepsilon}$$

$$\iff P_i^{-\varepsilon+\gamma\varepsilon+1} = M^{\gamma-1} P^{\gamma\varepsilon-\varepsilon+2-\gamma}$$

$$\iff P_i = M^{\frac{\gamma-1}{-\varepsilon+\gamma\varepsilon+1}} P^{\frac{\gamma\varepsilon-\varepsilon+2-\gamma}{-\varepsilon+\gamma\varepsilon+1}}$$

$$\iff P_i = M^{\phi} P^{1-\frac{\gamma-1}{-\varepsilon+\gamma\varepsilon+1}} \iff P_i^* = M^{\phi} P^{1-\phi}.$$

Cadre d'analyse

Le temps est supposé discret. Le modèle est spécifié sous forme logarithmique, i.e., $p(t) = log(P_t)$ et $m(t) = log(M_t)$. Le prix flexible optimal de l'entreprise i est donc

$$p_i^*(t) = (1 - \phi) p(t) + \phi m(t),$$

où ϕ est défini comme précédemment. La demande globale s'écrit

$$y(t) = m(t) - p(t)$$

avec $y(t) = log(Y_t)$. On suppose que la masse monétaire $m(t)$ suit une marche aléatoire : $m(t) = m(t-1) + \varepsilon(t)$.

On rappelle par ailleurs que

$$p(t) = \int_0^1 p_i(t)\, di.$$

L'économie est composée de deux secteurs, A et B. Le secteur A décide de ses prix aux périodes paires et le secteur B aux périodes impaires. On suppose par ailleurs que les deux secteurs partagent l'économie en deux.

Question 4

Exprimez les prix optimaux flexibles des deux secteurs. Commentez.

$$\begin{aligned}
p_A(t) &= (1-\phi)\,p(t) + \phi m(t) \\
&= (1-\phi)\frac{1}{2}\left(p_A(t) + p_B(t)\right) + \phi m(t) \\
p_A(t)\left[1-(1-\phi)\frac{1}{2}\right] &= (1-\phi)\frac{1}{2}p_B(t) + \phi m(t) \\
p_A(t)\frac{1}{2}(1-\phi) &= (1-\phi)\frac{1}{2}p_B(t) + \phi m(t) \\
p_A(t) &= p_B(t) + \frac{2\phi}{1-\phi}m(t).
\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$p_B(t) = p_A(t) + \frac{2\phi}{1-\phi}m(t).$$

On voit ici apparaître les interactions entre les deux secteurs : les décisions de l'un ont un effet sur les décisions de l'autre.

Modèle de Taylor

On suppose que les prix sont fixés pour deux périodes, c'est à dire qu'à la période t, le secteur A (par exemple), décide de ses prix $p_A(t+1)$ et $p_A(t+2)$, avec $p_A(t+1) = p_A(t+2)$. Le prix est donc fixé au niveau qui est *a priori* optimal au moment où la décision est prise. On note $x(t)$ le prix choisi par les entreprises qui changent leur prix à la période t. En supposant que ce prix est fixé à la moyenne des prix optimaux flexibles des deux périodes suivantes, on a

$$x(t) = \frac{1}{2}\left\{E_t\left[p_i^*(t+1)\right] + E_t\left[p_i^*(t+2)\right]\right\}.$$

Question 5

Donnez l'expression de $x(t)$ en fonction de $m(t)$, $E_t[p(t+1)]$ et $E_t[p(t+2)]$.

$$x(t) = \frac{1}{2}\left\{E_t\left[p_i^*(t+1)\right] + E_t\left[p_i^*(t+2)\right]\right\}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow x(t) &= \frac{1}{2}\left\{E_t\left[(1-\phi)\,p(t+1) + \phi m(t+1)\right]\right. \\
&\quad \left. + E_t\left[(1-\phi)\,p(t+2) + \phi m(t+2)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Or, comme $E_t[m(t+1)] = m(t)$ et $E_t[m(t+2)] = E_t[m(t+1)+\varepsilon_{t+1}] = E_t[m(t+1)] = m(t)$, il vient

$$x(t) = \frac{1}{2}\left\{(1-\phi)E_t[p(t+1)] + \phi m(t) + (1-\phi)E_t[p(t+2)] + \phi m(t)\right\}$$

$$\Longleftrightarrow x(t) = \frac{1}{2}\left\{(1-\phi)E_t[p(t+1)] + (1-\phi)E_t[p(t+2)] + 2\phi m(t)\right\}.$$

Question 6

Donnez l'expression de $x(t)$ en fonction de $m(t)$, $x(t-1)$ et $E_t[x(t+1)]$.

On sait que

$$p(t) = \frac{1}{2}[x(t-1) + x(t-2)],$$

d'où

$$p(t+1) = \frac{1}{2}[x(t) + x(t-1)]$$

et

$$p(t+2) = \frac{1}{2}[x(t+1) + x(t)].$$

On peut donc écrire

$$
\begin{aligned}
x(t) =& \frac{1}{2}\left\{(1-\phi)E_t\left[p(t+1)\right] + (1-\phi)E_t\left[p(t+2)\right] + 2\phi m(t)\right\} \\
\Longleftrightarrow x(t) =& \frac{1}{2}\Bigg\{(1-\phi)E_t\left[\frac{1}{2}\left[x(t)+x(t-1)\right]\right] \\
&+(1-\phi)E_t\left[\frac{1}{2}\left[x(t+1)+x(t)\right]\right] + 2\phi m(t)\Bigg\} \\
\Longleftrightarrow x(t) =& \frac{1}{2}\Bigg\{(1-\phi)\frac{1}{2}E_t\left[x(t)\right] + (1-\phi)\frac{1}{2}E_t\left[x(t-1)\right] \\
&+(1-\phi)\frac{1}{2}E_t\left[x(t+1)\right] + (1-\phi)\frac{1}{2}E_t\left[x(t)\right] + 2\phi m(t)\Bigg\} \\
\Longleftrightarrow x(t) =& \frac{1}{2}\Bigg\{(1-\phi)\frac{1}{2}x(t) + (1-\phi)\frac{1}{2}x(t-1) \\
&+(1-\phi)\frac{1}{2}E_t\left[x(t+1)\right] + (1-\phi)\frac{1}{2}x(t) + 2\phi m(t)\Bigg\} \\
\Longleftrightarrow x(t)\left[1-\frac{(1-\phi)}{2}\right] =& \frac{1}{2}\left\{(1-\phi)\frac{1}{2}x(t-1) + (1-\phi)\frac{1}{2}E_t\left[x(t+1)\right] + 2\phi m(t)\right\} \\
\Longleftrightarrow x(t)\frac{1+\phi}{2} =& \frac{1}{2}(1-\phi)\frac{1}{2}\left\{x(t-1) + E_t\left[x(t+1)\right] + 2\phi m(t)\right\} \\
\Longleftrightarrow x(t) =& \frac{1-\phi}{1+\phi}\frac{1}{2}\left\{x(t-1) + E_t\left[x(t+1)\right]\right\} + 2\frac{\phi}{1+\phi}m(t).
\end{aligned}
$$

Question 7

On admet que la solution de l'équation de récurrence trouvée à la question précédente est

$$x(t) = \lambda x(t-1) + (1-\lambda)\, m(t),$$

avec

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}.$$

Dans ce qui suit, on suppose $\lambda > 0$, i.e., $\phi < 1$. Donnez l'expression du niveau des prix $p(t)$ en fonction de $p(t-1)$, $m(t-2)$ et $\varepsilon(t-1)$.

On sait que

$$p(t) = \frac{1}{2}\left\{x(t-1) + x(t-2)\right\}.$$

Donc,

$$p(t) = \frac{1}{2}\left\{\lambda x(t-2) + (1-\lambda)\, m(t-1) + \lambda x(t-3) + (1-\lambda)\, m(t-2)\right\}$$

$$\iff p(t) = \frac{1}{2}\left\{\lambda\left(x(t-2)+x(t-3)\right)+(1-\lambda)\left(m(t-2)+\varepsilon(t-1)\right)+(1-\lambda)\,m(t-2)\right\}$$

$$\iff p(t) = \lambda\frac{1}{2}\left(x(t-2)+x(t-3)\right)+\frac{1}{2}\left\{2(1-\lambda)\left(m(t-2)\right)+(1-\lambda)\,\varepsilon(t-1)\right\}$$

$$\iff p(t) = \lambda p(t-1)+(1-\lambda)\,m(t-2)+\frac{(1-\lambda)}{2}\varepsilon(t-1)$$

Question 8

Montrez que le produit d'équilibre peut s'écrire

$$y(t) = \lambda y(t-1)+\varepsilon(t)+\frac{(1-\lambda)}{2}\varepsilon(t-1).$$

On sait que

$$y(t) = m(t) - p(t).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
y(t) =& m(t) - \left\{\lambda p(t-1)+(1-\lambda)\,m(t-2)+\frac{(1-\lambda)}{2}\varepsilon(t-1)\right\}\\
\iff y(t) =& m(t-1)+\varepsilon(t)-\lambda p(t-1)-(1-\lambda)\,m(t-2)-\frac{(1-\lambda)}{2}\varepsilon(t-1)\\
\iff y(t) =& \lambda m(t-1)-\lambda p(t-1)+\varepsilon(t)+(1-\lambda)\,m(t-1)-(1-\lambda)\,m(t-2)-\frac{(1-\lambda)}{2}\varepsilon(t-1)\\
\iff y(t) =& \lambda y(t-1)+\varepsilon(t)+(1-\lambda)\left[m(t-2)+\varepsilon(t-1)\right]-(1-\lambda)\,m(t-2)-\frac{(1-\lambda)}{2}\varepsilon(t-1)\\
\iff y(t) =& \lambda y(t-1)+\varepsilon(t)+\left[(1-\lambda)-\frac{(1-\lambda)}{2}\right]\varepsilon(t-1)\\
\iff y(t) =& \lambda y(t-1)+\varepsilon(t)+\frac{(1-\lambda)}{2}\varepsilon(t-1).
\end{aligned}$$

Question 9

Commentez cette expression.

Cette équation indique que des chocs sur la demande globale ont des effets persistants sur le produit, même après que toutes les firmes ont changé leur prix.