Macroéconomie
Paris 1 / ENS Cachan
Travaux Dirigés 2009-2010
Interrogation écrite N°1.2 - Corrigé

Marc Sangnier - marc.sangnier@ens-cachan.fr

Mercredi 17 mars 2010

Exercice 1 (9 points)

On se situe ici dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées. L_t individus naissent en période t et vivent deux périodes. Ils travaillent et épargnent en première période et vivent de leur capital en seconde période. Supposons que la population croît au taux constant n. Les marchés sont concurrentiels, le travail et le capital sont donc rémunérés à leurs productivité marginale. Il n'y a pas de dépréciation du capital. L'utilité d'un individu est représentée par la fonction

$$U(.) = log(c_t) + \frac{1}{1+\rho} log(c_{t+1})$$

avec $0 > \rho > -1$. La fonction de production est

$$Y_t = F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

avec $0 < \alpha < 1$. Son expression "par tête" est donc

$$y_t = f(k_t) = k_t^{\alpha}.$$

Question 1 (1 point)

En notant r_{t+1} le taux d'intérêt en période $t+1$ et w_t le salaire en période t, déterminez la contrainte budgétaire inter-temporelle de chaque individu. Donnez le programme du consommateur.

La contrainte budgétaire (saturée) en première période est

$$c_t + s_t = w_t.$$

La contrainte budgétaire en seconde période est

$$c_{t+1} = s_t\left(1 + r_{t+1}\right) \Longleftrightarrow s_t = \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}}.$$

La contrainte budgétaire inter-temporelle est donc

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t.$$

Le programme du consommateur est alors

$$\begin{cases} max_{c_t,\, c_{t+1}} & log\left(c_t\right) + \frac{1}{1+\rho} log\left(c_{t+1}\right) \\ sc & c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r_{t+1}} = w_t \end{cases}$$

Question 2 (2 points)

Donnez la condition d'équilibre pour c_{t+1}/c_t. Comment s'appelle cette condition ? Utilisez cette expression pour déterminez la consommation en première période et le taux d'épargne S_t.

Le Lagrangien de ce problème s'écrit

$$\mathcal{L} = log\left(c_t\right) + \frac{1}{1+\rho} log\left(c_{t+1}\right) + \lambda\left[w_t - c_t - \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}}\right].$$

Les conditions du premier ordre sont

$$\frac{1}{c_t} = \lambda,$$

$$\frac{1}{c_{t+1}}\frac{1}{1+\rho} = \lambda\frac{1}{1 + r_{t+1}}.$$

On obtient alors l'équation d'Euler

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1 + r_{t+1}}{1+\rho}.$$

A l'aide de la contrainte budgétaire inter-temporelle, il vient

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t$$

$$c_t + \frac{c_t}{1+\rho} = w_t$$

$$c_t = \frac{1+\rho}{2+\rho} w_t.$$

Le taux d'épargne est donc

$$S_t = \frac{w_t - c_t}{w_t} = 1 - \frac{c_t}{w_t} = 1 - \frac{1+\rho}{2+\rho} = \frac{1}{2+\rho}.$$

Question 3 (2 points)

Sachant que le stock de capital en période $t+1$ est

$$K_{t+1} = S_t w_t L_t,$$

déterminez, à l'aide de la fonction de production, la relation entre k_{t+1} et k_t, avec k_t le stock de capital par tête. Donnez l'expression qui définit implicitement le stock de capital d'équilibre k^*. Représentez graphiquement cette relation. Cet équilibre est-il stable ? Pourquoi ?

Le capital par tête est

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{S_t w_t L_t}{L_{t+1}} = \frac{S_t w_t L_t}{(1+n)\, L_t} = \frac{w_t}{(2+\rho)(1+n)}.$$

Comme le travail est rémunéré à sa productivité marginale, on a :

$$w_t = \frac{\partial F(.)}{\partial L_t} = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} = (1-\alpha)\, k_t^{\alpha}.$$

D'où

$$k_{t+1} = \frac{(1-\alpha)\, k_t^{\alpha}}{(2+\rho)(1+n)} = m(k_t).$$

A l'équilibre, on a $k_{t+1} = k_t = k^*$. Le stock de capital d'équilibre k^* est donc défini implicitement par

$$k^* = \frac{(1-\alpha)(k^*)^{\alpha}}{(2+\rho)(1+n)}.$$

D'où :

$$k^* = \left(\frac{1-\alpha}{(2+\rho)(1+n)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Cette valeur est déterminée par l'intersection de la première bissectrice et de la courbe $k_{t+1} = m(k_t)$ sur la figure 1. Cet équilibre est stable car si l'on part d'un niveau supérieur ou inférieur à k^*, on converge toujours vers k^*. Ce résultat est déterminé par les rendement décroissants du capital.

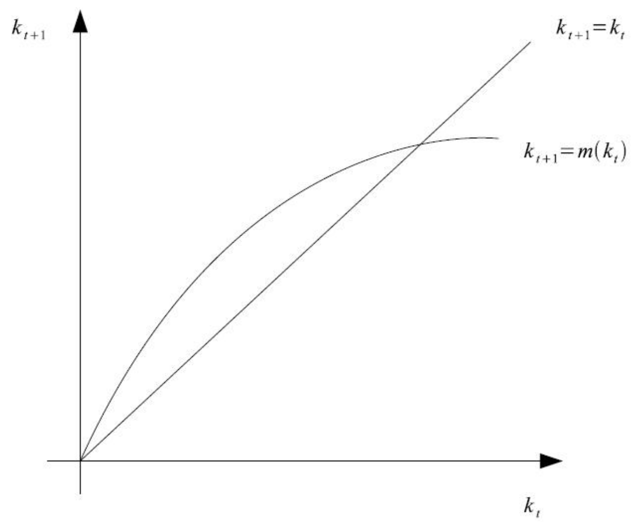

Figure 1 : Évolution du capital par tête.

Question 4 (3 points)

Expliquez comment les événements suivants affectent la relation entre k_{t+1} et k_t, commentez les implications de ces modifications. Illustrez votre raisonnement par une représentation graphique.

1. Un hausse de n.

Une hausse de n déplace la courbe $m(k_t)$ vers le bas (on passe de $m(k_t)$ à $m_2(k_t)$ sur la figure 2). L'épargne de première période est inchangée et conduit au même montant de capital en seconde période. Mais le capital est réparti sur davantage d'individus. Le capital par tête est donc plus faible, tout comme le stock de capital d'équilibre.

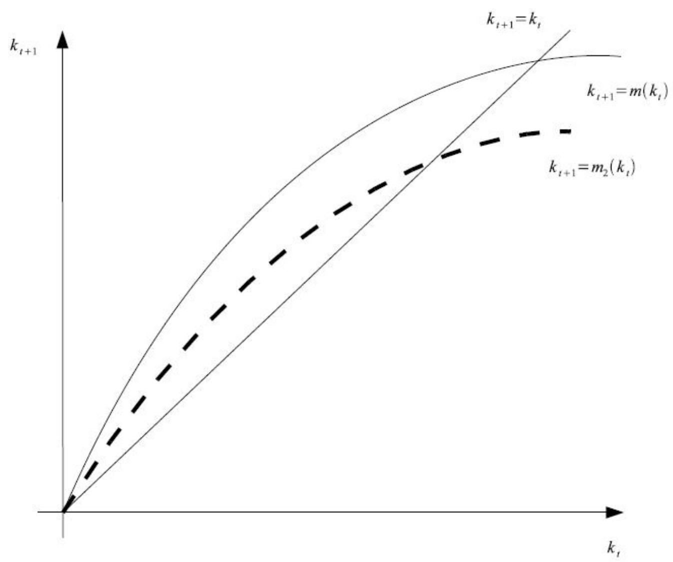

Figure 2 : Hausse de n.

2. Une baisse de ρ.

Si ρ diminue, les individus deviennent plus patients. Ils épargnent un part plus important de leur revenu, S_t s'accroît. L'épargne étant plus importante, le capital par tête en seconde période l'est aussi pour tout niveau k_t de première période. La courbe $m(k_t)$ se déplace donc vers le haut (on passe en $m_2(k_t)$ sur la figure 3) et le niveau d'équilibre du stock de capital s'accroît également.

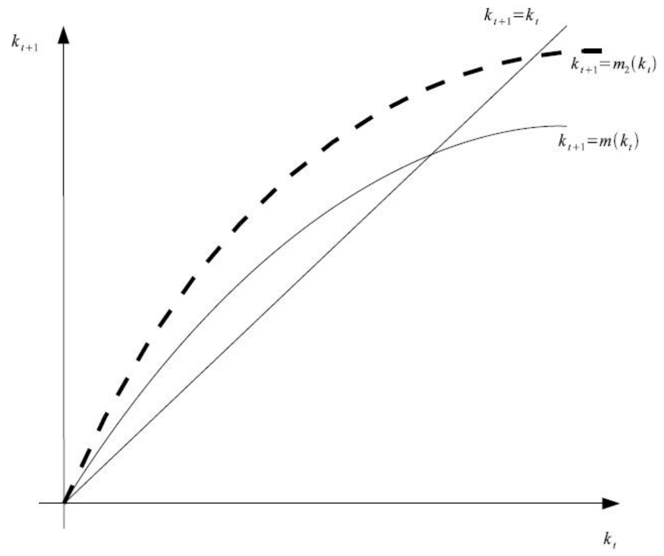

Figure 3 : Baisse de ρ.

3. Un baisse de l'efficacité de la production. Supposez par exemple que $f(k_t) = Bk_t^{\alpha}$ et que B diminue.

Le salaire est maintenant donné par

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) = Bk_t^{\alpha} - k_t \alpha B k_t^{\alpha-1} = B(1-\alpha) k_t^{\alpha}.$$

Et la relation entrek_{t+1} *et* k_t *devient*

$$k_{t+1} = \frac{B(1-\alpha) k_t^{\alpha}}{(2+\rho)(1+n)}.$$

Une baisse de B déplace la courbe $m(k_t)$ vers le bas (voir la figure 2) et réduit le stock de capital par tête à l'équilibre. La baisse de B n'a pas d'effet sur le taux d'épargne mais réduit les salaires. Les individus épargnent la même part de leur revenu, mais celui-ci est réduit. Le capital en seconde période est donc plus faible pour tout stock de capital en première période.

Question 5 (1 point)

Supposons maintenant que le capital se déprécie au taux $\delta > 0$, on a alors $r_t = f'(k_t) - \delta$. Comment cela affecte-t-il le taux d'épargne ? Dans quelle mesure ce résultat dépend-t-il de la fonction d'utilité choisie ici ?

Le taux d'épargne n'est pas affecté par cette modification. Avec un fonction d'utilité logarithmique, le taux d'épargne ne dépend pas du taux d'intérêt. Cela ne sera pas forcément le cas avec une fonction d'utilité différente.

Exercice 2 (8 points)

Soit une entreprise faisant face à une contrainte de débouchés, i.e., elle ne peut écouler qu'une quantité limitée de biens au prix du marché. Soit Y_t^a cette demande anticipée. On suppose que la fonction de production de l'entreprise est $F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$. A la période t, le salaire est w_t, le coût d'usage du capital est z_t et le prix de vente des biens produit est p_t. On suppose ici qu'il n'y a pas de dépréciation du capital.

Question 1 (1 point)

Donnez le programme de l'entreprise.

Le programme de l'entreprise est

$$\begin{cases} max_{L_t, K_t} & p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - z_t K_t \\ sc & F(K_t, L_t) \leq Y_t^a \end{cases}$$

Question 2 (2 points)

On suppose que l'on se trouve dans une situation où la contrainte de débouchés est saturée. Exprimez le stock de capital optimal en période t en fonction de la demande anticipée.

Les conditions du premier ordre du programme de l'entreprise permettent d'écrire

$$L_t = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w_t}{z_t} K_t.$$

Comme la contrainte est saturée, on peut en déduire

$$K_t = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{z_t}{w_t} \right)^{\alpha - 1} Y_t^a.$$

A partir de maintenant, on pose

$$\nu = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{z_t}{w_t} \right)^{\alpha-1}$$

Question 3 (1 point)

Déduisez-en l'expression de l'investissement en fonction de la variation de la demande anticipée. On appelle cette expression l"'accélérateur".

Comme il n'y a pas de dépréciation, la dynamique du capital est donnée par

$$K_{t+1} = K_t + I_t.$$

D'où

$$\begin{aligned} I_t &= K_{t+1} - K_t \\ &= \nu \left[Y_{t+1}^a - Y_t^a \right] \\ &= \nu \Delta Y_{t+1}^a. \end{aligned}$$

Question 4 (2 points)

Supposons que les anticipations de l'entreprise concernant la demande sont myopes, i.e., fondées sur ce qui est observé. Donnez l'expression de l'accélérateur simple. Commentez très brièvement.

Des anticipations myopes correspondent à $Y_{t+1}^a = Y_t$*. Il vient alors*

$$I_t = \nu \left(Y_t - Y_{t-1} \right).$$

L'entrepreneur suppose ici que toute variation de la production est acquise et permanente.

Question 5 (1 point)

Supposons maintenant que les anticipations sont adaptatives, i.e., que la révision des anticipations est proportionnelle à l'erreur d'anticipation constatée à la période précédente. En d'autres termes

$$Y_t^a - Y_{t-1}^a = \gamma \left(Y_{t-1} - Y_{t-1}^a \right),$$

avec $0 < \gamma < 1$. Exprimez l'investissement en période t en fonction de la production et du stock de capital en période t.

On peut écrire

$$Y_t^a = \gamma Y_{t-1} + (1-\gamma) Y_{t-1}^a.$$

En utilisant

$$K_t = \nu Y_t^a,$$

il vient

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= \nu\gamma Y_t + \nu (1-\gamma) Y_t^a \\ &= \nu\gamma Y_t + (1-\gamma) K_t. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I_t &= K_{t+1} - K_t \\ &= \nu\gamma Y_t + (1-\gamma) K_t - K_t \\ &= \gamma (\nu Y_t - K_t). \end{aligned}$$

Question 6 (1 point)

Montrez que l'accélérateur flexible peut s'écrire

$$I_t = \gamma\nu\Delta Y_t + (1-\gamma) I_{t-1}.$$

Commentez.

D'après ce qui précède, on peut écrire

$$K_{t+1} = \nu\gamma Y_t + (1-\gamma) K_t$$

et

$$K_t = \nu\gamma Y_{t-1} + (1-\gamma) K_{t-1}.$$

On peut en déduire

$$\begin{aligned} I_t &= K_{t+1} - K_t \\ &= \nu\gamma Y_t + (1-\gamma) K_t - \nu\gamma Y_{t-1} + (1-\gamma) K_{t-1} \\ &= \nu\gamma \Delta Y_t + (1-\gamma) [K_t - K_{t-1}] \\ &= \gamma\nu\Delta Y_t + (1-\gamma) I_{t-1}. \end{aligned}$$

L'expression de l'accélérateur flexible comporte ici deux termes. Le premier est similaire à celui obtenu dans le cas de l'accélérateur simple. Le second introduit l'investissement passé, ce qui correspond à un lissage de l'investissement au cours du temps.

Exercice 3 (3 points)

On s'intéresse ici à l'approche monétariste du marché du travail. La demande de travail est

$$L_t^d = \frac{1}{1-\alpha}\left(w_t - p_t\right),$$

avec $0 < \alpha < 1$. L'offre de travail est

$$L_t^s = \varepsilon\left(w_t - p_t^a\right) + L,$$

avec $\varepsilon > 0$.

Question 1 (1 point)

Commentez ces deux expressions.

La demande de travail de la part des entreprises correspond à l'égalité entre salaire réel et productivité marginale. L'offre de travail de la part des ménages dépend du salaire réel anticipé, i.e., du salaire négocié et du niveau des prix anticipé. Le paramètre ε correspond à l'élasticité de l'offre de travail par rapport au salaire réel.

Question 2 (1 point)

Déterminez l'emploi d'équilibre.

A l'équilibre du marché du travail, le salaire nominal s'ajuste de façon à égaliser offre et demande, le niveau d'emploi d'équilibre est alors L^*. On a donc

$$(1-\alpha)L^* + p_t = (L^* - L)\frac{1}{\varepsilon} + p_t^a$$

$$\iff L^*\left[\frac{1}{\varepsilon} - (1-\alpha)\right] - \frac{L}{\varepsilon} = p_t - p_t^a$$

$$\iff L^* = \left(p_t - p_t^a\right)\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon(1-\alpha)} + L\frac{1}{1-\varepsilon(1-\alpha)}$$

Question 3 (1 point)

En supposant que l'erreur d'anticipation faite sur le niveau des prix est la même que celle faite sur l'inflation. Exprimez l'emploi en fonction de l'erreur d'anticipation de l'inflation. Faite apparaître le niveau de l'emploi lorsque l'évolution des prix est parfaitement anticipée.

On suppose ici que $p_t - p_t^a = \pi_t - \pi_t^a$. Il vient alors

$$L^* = (\pi_t - \pi_t^a) \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon (1 - \alpha)} + L \frac{1}{1 - \varepsilon (1 - \alpha)}.$$

Lorsque l'évolution des prix est parfaitement anticipée, on a $\pi_t = \pi_t^a$. Il vient alors

$$L^* = L \frac{1}{1 - \varepsilon (1 - \alpha)}.$$