Macroéconomie
Paris 1 / ENS Cachan
Travaux Dirigés 2009-2010
Interrogation écrite N°1.1 - Corrigé

Marc Sangnier - marc.sangnier@ens-cachan.fr

Mercredi 17 mars 2010

Exercice 1 (9 points)

On se situe ici dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées. L_t individus naissent en période t et vivent deux périodes. Ils travaillent et épargnent en première période et vivent de leur capital en seconde période. Supposons que la population croît au taux constant n. Les marchés sont concurrentiels, le travail et le capital sont donc rémunérés à leurs productivité marginale. Il n'y a pas de dépréciation du capital. L'utilité d'un individu est représentée par la fonction

$$U(.) = log(c_t) + \frac{1}{1+\rho} log(c_{t+1})$$

avec $0 > \rho > -1$. La fonction de production est

$$Y_t = F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

avec $0 < \alpha < 1$. Son expression "par tête" est donc

$$y_t = f(k_t) = k_t^{\alpha}.$$

Question 1 (1 point)

En notant r_{t+1} le taux d'intérêt en période $t+1$ et w_t le salaire en période t, déterminez la contrainte budgétaire inter-temporelle de chaque individu. Donnez le programme du consommateur.

La contrainte budgétaire (saturée) en première période est

$$c_t + s_t = w_t.$$

La contrainte budgétaire en seconde période est

$$c_{t+1} = s_t\left(1 + r_{t+1}\right) \Longleftrightarrow s_t = \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}}.$$

La contrainte budgétaire inter-temporelle est donc

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t.$$

Le programme du consommateur est alors

$$\left\{\begin{array}{cc} max_{c_t,\, c_{t+1}} & log\left(c_t\right) + \frac{1}{1+\rho} log\left(c_{t+1}\right) \\ sc & c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r_{t+1}} = w_t \end{array}\right.$$

Question 2 (2 points)

Donnez la condition d'équilibre pour c_{t+1}/c_t. Comment s'appelle cette condition ? Utilisez cette expression pour déterminez la consommation en première période et le taux d'épargne S_t.

Le Lagrangien de ce problème s'écrit

$$\mathcal{L} = log\left(c_t\right) + \frac{1}{1+\rho} log\left(c_{t+1}\right) + \lambda\left[w_t - c_t - \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}}\right].$$

Les conditions du premier ordre sont

$$\frac{1}{c_t} = \lambda,$$

$$\frac{1}{c_{t+1}}\frac{1}{1+\rho} = \lambda\frac{1}{1 + r_{t+1}}.$$

On obtient alors l'équation d'Euler

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1 + r_{t+1}}{1+\rho}.$$

A l'aide de la contrainte budgétaire inter-temporelle, il vient

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t$$

$$c_t + \frac{c_t}{1+\rho} = w_t$$

$$c_t = \frac{1+\rho}{2+\rho} w_t.$$

Le taux d'épargne est donc

$$S_t = \frac{w_t - c_t}{w_t} = 1 - \frac{c_t}{w_t} = 1 - \frac{1+\rho}{2+\rho} = \frac{1}{2+\rho}.$$

Question 3 (2 points)

Sachant que le stock de capital en période $t+1$ est

$$K_{t+1} = S_t w_t L_t,$$

déterminez, à l'aide de la fonction de production, la relation entre k_{t+1} et k_t, avec k_t le stock de capital par tête. Donnez l'expression qui définit implicitement le stock de capital d'équilibre k^*. Représentez graphiquement cette relation. Cet équilibre est-il stable ? Pourquoi ?

Le capital par tête est

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{S_t w_t L_t}{L_{t+1}} = \frac{S_t w_t L_t}{(1+n)\, L_t} = \frac{w_t}{(2+\rho)\,(1+n)}.$$

Comme le travail est rémunéré à sa productivité marginale, on a :

$$w_t = \frac{\partial F\,(.)}{\partial L_t} = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} = (1-\alpha)\, k_t^{\alpha}.$$

D'où

$$k_{t+1} = \frac{(1-\alpha)\, k_t^{\alpha}}{(2+\rho)\,(1+n)} = m\,(k_t)\,.$$

A l'équilibre, on a $k_{t+1} = k_t = k^*$. Le stock de capital d'équilibre k^* est donc défini implicitement par

$$k^* = \frac{(1-\alpha)\,(k^*)^{\alpha}}{(2+\rho)\,(1+n)}.$$

D'où :

$$k^* = \left(\frac{1-\alpha}{(2+\rho)\,(1+n)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Cette valeur est déterminée par l'intersection de la première bissectrice et de la courbe $k_{t+1} = m\,(k_t)$ sur la figure 1. Cet équilibre est stable car si l'on part d'un niveau supérieur ou inférieur à k^*, on converge toujours vers k^*. Ce résultat est déterminé par les rendement décroissants du capital.

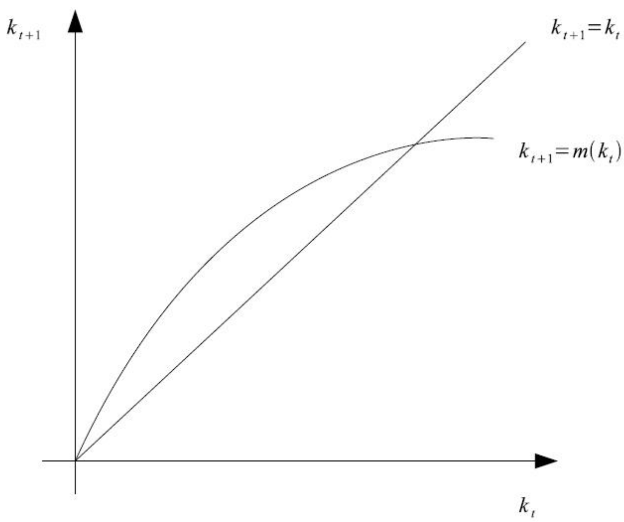

Figure 1 : Évolution du capital par tête.

Question 4 (3 points)

Expliquez comment les événements suivants affectent la relation entre k_{t+1} et k_t, commentez les implications de ces modifications. Illustrez votre raisonnement par une représentation graphique.

1. Un hausse de n.

Une hausse de n déplace la courbe $m(k_t)$ vers le bas (on passe de $m(k_t)$ à $m_2(k_t)$ sur la figure 2). L'épargne de première période est inchangée et conduit au même montant de capital en seconde période. Mais le capital est réparti sur davantage d'individus. Le capital par tête est donc plus faible, tout comme le stock de capital d'équilibre.

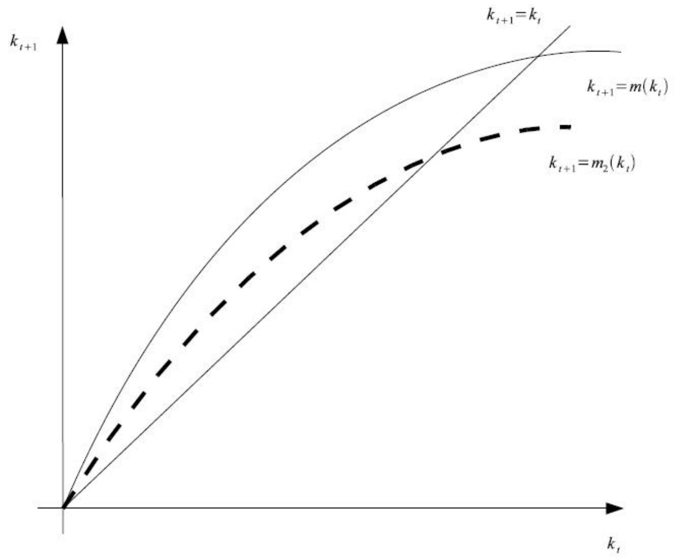

Figure 2 : Hausse de n.

2. Une baisse de ρ.

Si ρ diminue, les individus deviennent plus patients. Ils épargnent un part plus important de leur revenu, S_t s'accroît. L'épargne étant plus importante, le capital par tête en seconde période l'est aussi pour tout niveau k_t de première période. La courbe $m(k_t)$ se déplace donc vers le haut (on passe en $m_2(k_t)$ sur la figure 3) et le niveau d'équilibre du stock de capital s'accroît également.

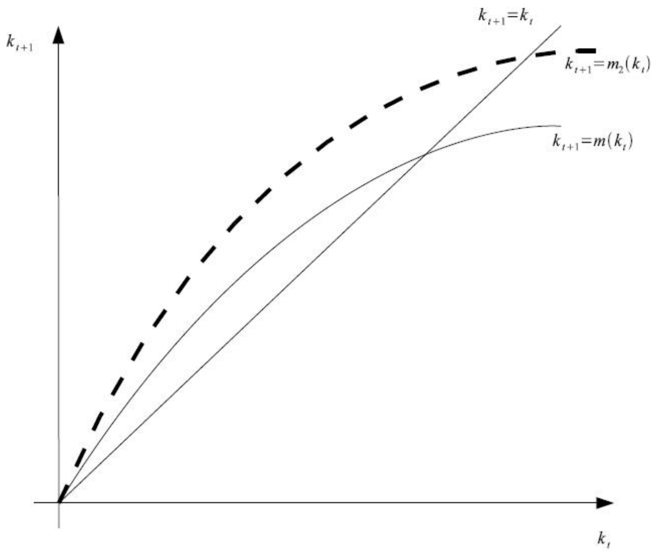

Figure 3 : Baisse de ρ.

3. Un baisse de l'efficacité de la production. Supposez par exemple que $f(k_t) = Bk_t^{\alpha}$ et que B diminue.

Le salaire est maintenant donné par

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) = Bk_t^{\alpha} - k_t \alpha B k_t^{\alpha-1} = B(1-\alpha) k_t^{\alpha}.$$

Et la relation entrek_{t+1} et k_t devient

$$k_{t+1} = \frac{B(1-\alpha) k_t^{\alpha}}{(2+\rho)(1+n)}.$$

Une baisse de B déplace la courbe $m(k_t)$ vers le bas (voir la figure 2) et réduit le stock de capital par tête à l'équilibre. La baisse de B n'a pas d'effet sur le taux d'épargne mais réduit les salaires. Les individus épargnent la même part de leur revenu, mais celui-ci est réduit. Le capital en seconde période est donc plus faible pour tout stock de capital en première période.

Question 5 (1 point)

Supposons maintenant que le capital se déprécie au taux $\delta > 0$, on a alors $r_t = f'(k_t) - \delta$. Comment cela affecte-t-il le taux d'épargne ? Dans quelle mesure ce résultat dépend-t-il de la fonction d'utilité choisie ici ?

Le taux d'épargne n'est pas affecté par cette modification. Avec un fonction d'utilité logarithmique, le taux d'épargne ne dépend pas du taux d'intérêt. Cela ne sera pas forcément le cas avec une fonction d'utilité différente.

Exercice 2 (8 points)

Soit un individu qui vit deux périodes. Sa consommation de première période est C_1, celle de seconde période C_2. Le revenu perçu en première période est Y_1, celui perçu en seconde période Y_2. On suppose $Y_1 < Y_2$. L'individu peut prêter ou emprunter au taux r. On suppose que la fonction d'utilité à les propriétés classiques.

Question 1 (1 point)

Exprimez la contrainte budgétaire inter-temporelle de l'individu.

La contrainte budgétaire en première période est

$$C_1 + S_1 = Y_1.$$

La contrainte budgétaire en seconde période est

$$C_2 = Y_2 + S_1 (1 + r) \Longleftrightarrow S_1 = \frac{C_2}{1+r} - \frac{Y_2}{1+r}.$$

La contrainte budgétaire inter-temporelle est donc

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}.$$

Question 2 (1 point)

Représentez graphiquement dans le plan (C_1, C_2) la situation d'un individu emprunteur.

La situation d'un individu emprunteur est décrite par la figure 1. Un individu qui n'est ni prêteur ni emprunteur en première période se trouverait au point (Y_1, Y_2).

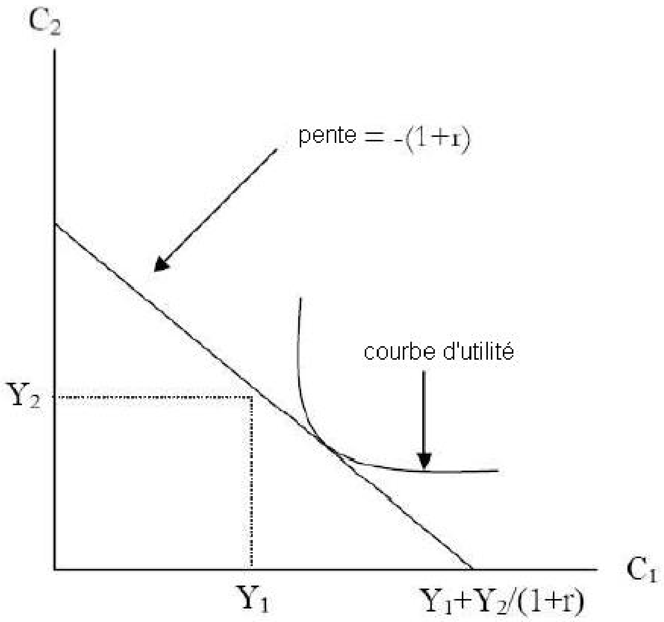

Figure 1 : Individu emprunteur en première période.

Question 3 (2 points)

Quel est l'effet sur l'épargne de cet individu d'une hausse du taux d'intérêt r ? Répondez en présentant l'effet revenu et l'effet substitution.

Une hausse du taux d'intérêt va accroître l'épargne (réduire l'emprunt). Pour un emprunteur, l'effet revenu et l'effet substitution vont dans le même sens. Une hausse du taux d'intérêt réduit le prix de la consommation en seconde période, ce qui pousse à substituer la consommation de seconde période à la consommation de première période. Cette substitution accroît donc l'épargne (réduire l'emprunt). La hausse du taux d'intérêt réduit également la richesse de l'individu car celui-ci est emprunteur et doit donc maintenant verser des intérêts plus élevés. Il est donc pousser à réduire sa consommation en première période en accroissant son épargne (en réduisant sa dette).

Question 4 (1 point)

On suppose maintenant que le gouvernement met en place un impôt sur les opérations financières. Le taux d'intérêt réel est alors donné par $(1-t)\,r$, où t est le taux d'imposition sur toutes les opérations financières. On suppose ici que le gouvernement ne fait aucun usage particulier des revenus collectés. Exprimez la contrainte budgétaire inter-temporelle de l'individu.

La contrainte budgétaire inter-temporelle est maintenant

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r\,(1-t)} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r\,(1-t)}.$$

Question 5 (1 point)

Représentez graphiquement dans le plan (C_1, C_2) la situation d'un individu prêteur.

La situation d'un individu prêteur est décrite par la figure 2.

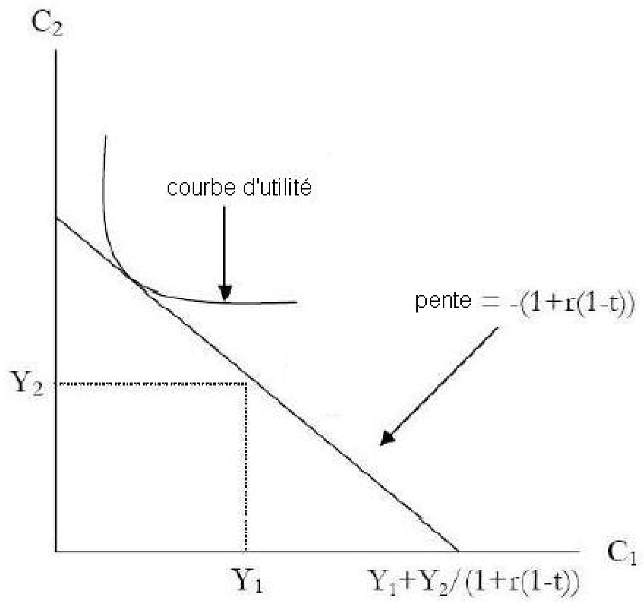

Figure 2 : Individu prêteur en première période.

Question 6 (2 points)

Quel est l'effet sur l'épargne de cet individu d'une hausse du taux d'imposition t ? Répondez en présentant l'effet revenu et l'effet substitution.

Une hausse de t réduit le taux d'intérêt réel. Dans le cas d'un prêteur, les effets revenu et substitution sont de sens opposés, l'effet global est donc incertain. La baisse du taux d'intérêt réel accroît le prix de la consommation en seconde période, ce qui conduit à réduire l'épargne via l'effet de substitution. Cependant, la baisse du taux d'intérêt réel réduit également la richesse globale de l'emprunteur, ce qui pousse à accroître l'épargne via l'effet revenu.

Exercice 3 (3 points)

On s'intéresse ici à l'approche monétariste du marché du travail. La demande de travail est

$$L_t^d = \frac{1}{1-\alpha}\left(w_t - p_t\right),$$

avec $0 < \alpha < 1$. L'offre de travail est

$$L_t^s = \varepsilon\left(w_t - p_t^a\right) + L,$$

avec $\varepsilon > 0$.

Question 1 (1 point)

Commentez ces deux expressions.

La demande de travail de la part des entreprises correspond à l'égalité entre salaire réel et productivité marginale. L'offre de travail de la part des ménages dépend du salaire réel anticipé, i.e., du salaire négocié et du niveau des prix anticipé. Le paramètre ε correspond à l'élasticité de l'offre de travail par rapport au salaire réel.

Question 2 (1 point)

Déterminez l'emploi d'équilibre.

A l'équilibre du marché du travail, le salaire nominal s'ajuste de façon à égaliser offre et demande, le niveau d'emploi d'équilibre est alors L^*. On a donc

$$(1-\alpha) L^* + p_t = (L^* - L) \frac{1}{\varepsilon} + p_t^a$$

$$\Longleftrightarrow L^* \left[\frac{1}{\varepsilon} - (1-\alpha)\right] - \frac{L}{\varepsilon} = p_t - p_t^a$$

$$\Longleftrightarrow L^* = (p_t - p_t^a) \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon(1-\alpha)} + L \frac{1}{1-\varepsilon(1-\alpha)}$$

Question 3 (1 point)

En supposant que l'erreur d'anticipation faite sur le niveau des prix est la même que celle faite sur l'inflation. Exprimez l'emploi en fonction de l'erreur d'anticipation de l'inflation. Faite apparaître le niveau de l'emploi lorsque l'évolution des prix est parfaitement anticipée.

On suppose ici que $p_t - p_t^a = \pi_t - \pi_t^a$. Il vient alors

$$L^* = (\pi_t - \pi_t^a) \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon(1-\alpha)} + L \frac{1}{1-\varepsilon(1-\alpha)}.$$

Lorsque l'évolution des prix est parfaitement anticipée, on a$\pi_t = \pi_t^a$. Il vient alors

$$L^* = L \frac{1}{1-\varepsilon(1-\alpha)}.$$