Fondements de l'Analyse Économique
Travaux Dirigés 2010-2011
Interrogation écrite N°2
Corrigé

Cécile Martin & Marc Sangnier

1er décembre 2010

1 Modèle de sécurité routière[1]

On s'intéresse ici au comportement d'un conducteur sur la route.

Probabilité d'être impliqué dans un accident La probabilité p qu'un conducteur soit impliqué dans un accident est modifiée par ses efforts de sécurité e et les mesures de sécurité extérieures s qu'il ne contrôle pas. On note donc $p(e,s)$ la probabilité qu'un accident ait lieu, avec $p_e < 0$, $p_{ee} > 0$, $p_s < 0$, $p_{ss} > 0$ et $p_{es} > 0$. Par exemple, $p_s < 0$ signifie qu'un accroissement de la qualité de la route va réduire la probabilité d'être impliqué dans un accident, et $p_{ss} > 0$ signifie qu'un accroissement supplémentaire de la qualité de la route va toujours réduire la probabilité d'être impliqué dans un accident, mais de façon moins importante.

Dommage subi en cas d'accident La perte L encourue par un conducteur en cas d'accident dépend également des ses efforts de sécurité e et des mesures de sécurité extérieures s. On note donc $L(e,s)$ la perte subie en cas d'accident, avec $L_e < 0$, $L_{ee} > 0$, $L_s < 0$, $L_{ss} > 0$ et $L_{es} > 0$. Si aucun accident ne survient, la perte encourue est nulle.

Désutilité liée à la sécurité Un conducteur souffre d'une désutilité D liée à ses efforts de sécurité et aux mesures de sécurité extérieures. On note donc $D(e,s)$ la désutilité ressentie par un conducteur, avec $D_e > 0$, $D_{ee} > 0$, $D_s \geq 0$ et $D_{es} \geq 0$. Les efforts d'un conducteur peuvent impliquer une perte de temps, de l'inconfort, de l'énergie ou de l'argent, d'où $D_e > 0$. Un effort supplémentaire peut-être très "coûteux", d'où $D_{ee} > 0$. La désutilité ressentie peut dépendre des

[1] Exercice inspiré de : Glenn Blomquist, *A utility maximization model of driver traffic safety behavior*, Accident Analysis & Prevention Volume 18, Issue 5, October 1986.

conditions extérieures, d'où $D_s > 0$; conditions qui peuvent aussi interagir avec l'effort du conducteur, d'où $D_{es} \geq 0$.

Bien-être On suppose que l'utilité d'un conducteur dépend de son revenu I et des coûts supportés $L(e,s)$ et $D(e,s)$. Pour simplifier, on suppose que la perte et la désutilité s'expriment sous forme monétaire. L'utilité d'un conducteur s'écrit donc

$$U = I - D(e,s) - \tilde{L}(e,s) \text{ avec } \tilde{L}(e,s) = 0 \text{ sans accident}$$
$$\text{et } \tilde{L}(e,s) = L(e,s) \text{ en cas d'accident}$$

Question 1 Que signifient les hypothèses $p_{es} > 0$ et $L_{es} > 0$? 1 point

Ces hypothèses signifient que les efforts de sécurité du conducteur et les mesures de sécurité extérieures sont des substituts dans la "production" de la sécurité et la réduction de la perte éventuelle subie.

Question 2 Montrez que l'espérance d'utilité $E(U)$ d'un conducteur peut s'écrire 2 points

$$E(U) = I - D(e,s) - p(e,s)\, L(e,s)\,.$$

Commentez cette expression.

L'espérance d'utilité s'écrit

$$\begin{aligned} E(U) &= p(e,s)\{I - D(e,s) - L(e,s)\} + [1 - p(e,s)]\{I - D(e,s)\} \\ &= I - D(e,s) - p(e,s)\, L(e,s) \end{aligned}$$

Cette expression montre que l'utilité espérée est égale au revenu moins la désutilité moins la perte espérée en cas d'accident.

Question 3 Donnez la condition d'optimalité (au premier ordre) pour ce consommateur. Ré-écrivez la en fonction de D_e, p_e, $L(e,s)$, $p(e,s)$ et L_e. Commentez. 2 points

Le conducteur va arbitrer entre les avantages et les inconvénients de ses propres efforts de sécurité jusqu'à ce que

$$\frac{\partial E(U)}{\partial e} = 0$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} -D_e - p_e L(e,s) - p(e,s) L_e = 0 \\ \iff -D_e = p_e L(e,s) + p(e,s) L_e \end{aligned}$$

Cette expression définit implicitement l'effort optimal. Cet effort optimal est tel que la désutilité marginale de l'effort est égale au bénéfice marginal associé à la réduction par l'effort de la perte espérée. Cette réduction peut survenir en réduisant la probabilité d'accident ou la perte subie en cas d'accident.

Question 4 Donnez et exprimez la condition du second ordre. 1 point

La condition du second ordre est

$$\frac{\partial^2 E(U)}{\partial^2 e} < 0$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} -D_{ee} - p_{ee} L(e,s) - p_e L_e - p_e L_e - p(e,s) L_{ee} < 0 \\ \iff -D_{ee} - p_{ee} L(e,s) - 2p_e L_e - p(e,s) L_{ee} < 0 \end{aligned}$$

Question 5 On suppose ici que $D_s = D_{es} = 0$; en d'autres termes, les conditions de sécurité extérieures n'ont pas d'effet sur la désutilité du conducteur. En considérant la condition du premier ordre comme une fonction implicite (c'est à dire qu'on considère que la condition du première ordre définit implicitement e en fonction des autres variables) répondez à la question suivante : comment les efforts de sécurité d'un conducteur vont-ils varier suite à un changement des conditions extérieures de sécurité ? 3 points

Indication : Ecrivez la différentielle totale de la condition du premier ordre.

On reprend l'expression

$$-D_e = p_e L(e,s) + p(e,s) L_e$$

Et on en écrit la différentielle totale en considérant que e et s varient. Il vient alors

$$
\begin{aligned}
-D_{ee}de &= p_{ee}L(e,s)\,de + p_eL_ede + p_eL_sds + p_{es}L(e,s)\,ds \\
&\quad + p_eL_ede + p(e,s)\,L_{ee}de + p_sL_eds + p(e,s)\,L_{es}ds \\
0 &= (p_{ee}L(e,s) + 2p_eL_e + p(e,s)\,L_{ee} + D_{ee})\,de \\
&\quad + (p_eL_s + p_sL_e + p(e,s)\,L_{es} + p_{es}L(e,s))\,ds \\
\frac{de}{ds} &= \frac{p_eL_s + p_sL_e + p(e,s)\,L_{es} + p_{es}L(e,s)}{-p_{ee}L(e,s) - 2p_eL_e - p(e,s)\,L_{ee} - D_{ee}}
\end{aligned}
$$

On sait, d'après la condition du second ordre trouvée à la question précédente, que le dénominateur de cette expression est négatif. De plus, p_e, L_s, p_s et L_e sont tous négatifs, donc $p_eL_s + p_sL_e$ est positif. De plus $p(e,s)\,L_{es} + p_{es}L(e,s)$ est également postif. On en déduit donc que $de/ds < 0$. Un accroissement des mesures de sécurité extérieures va donc conduite le conducteur à réduire ses propres efforts de sécurité.

Question 6 Une étude a été menée aux États-Unis le jour de la Fête du Travail en 1981. Les conducteurs ont été observés sur une autoroute entre Baltimore et Pittsburgh. Durant la journée, une forte tempête a eu lieu sur le trajet. L'étude a montré qu'avant la tempête 13% des conducteurs utilisaient leur ceinture de sécurité. Pendant et après la tempête, ils étaient 30% à utiliser leur ceinture de sécurité. Ces observations sont-elles conformes aux prédictions du modèle ? 2 point

La tempête dégrade les conditions extérieures de sécurité (le sol est plus glissant). La plus grande utilisation de la ceinture de sécurité correspond à un accroissement de l'effort de sécurité individuel. Les faits observés sont donc conformes à ce que prédit le modèle : les efforts de sécurité individuels varient en sens inverse des "menaces" représentées par l'environnement extérieur.

2 Arbitrage consommation-loisir et choix intertemporel

On représente les préférences intertemporelles d'un agent par la fonction d'utilité suivante :

$$U(C_1, C_2) = ln(C_1) + ln(L - L_1) + \delta ln(C_2),$$

où C_t représente la consommation à la période $t = 1, 2$, L_1 est le temps de travail en première période 1 et L le temps total dont l'individu dispose en période 1. On suppose ici que l'agent de travaille que pendant la première période, il reçoit alors un salaire horaire w_1. Durant la seconde période, il reçoit un revenu exogène R_2. Les prix du bien de consommation durant le deux périodes, p_1 et p_2 sont égaux à 1. L'agent peut prêter ou s'endetter au taux d'intérêt r.

Question 1 Montrez que la contrainte budgétaire peut s'écrire : $C_1 + \frac{C_2}{1+r} = w_1 L_1 + \frac{R_2}{1+r}$. Exprimez C_2 en fonction de C_1, L_1, R_2, w_1 et r. 1 point

En première période, l'épargne est $S = w_1 L_1 - C_1$. La consommation de seconde période est financée par l'épargne ou par le revenu exogènhe : $C_2 = R_2 + S(1+r)$. On peut donc écrire

$$C_2 = R_2 + (w_1 L_1 - C_1)(1+r)$$

$$\Longleftrightarrow C_1 + \frac{C_2}{1+r} = w_1 L_1 + \frac{R_2}{1+r}$$

Question 2 Interprétez δ. Ecrivez le programme du consommateur, le Lagrangien associé et donnez la valeur du taux marginal de substitution (entre les quantités consommées) intertemporel à l'optimum. Ré-écrivez cette condition à l'aide de l'expression de $U(.)$. 2 points

Le paramètre δ est le facteur d'actualisation, il peut être écrit comme $\delta = 1/1+\theta$, où θ est le taux d'escompte psychologique ou taux de préférence pour le présent.

Le programme du consommateur est

$$\begin{cases} max_{c_t, L_1} & U(C_1, C_2) \\ sc & C_1 + \frac{C_2}{1+r} = w_1 L + \frac{R_2}{1+r} \end{cases}$$

Le Lagrangien associé est

$$\mathcal{L}(.) = ln(C_1) + ln(L - L_1) + \delta ln(C_2) + \lambda \left[C_1 + \frac{C_2}{1+r} - w_1 L_1 - \frac{R_2}{1+r} \right].$$

Les deux premières conditions du premier ordre sont

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial U(.)}{\partial C_1} = -\lambda \qquad \Longleftrightarrow \frac{1}{C_1} = -\lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial U(.)}{\partial C_2} = -\lambda \frac{1}{1+r} \qquad \Longleftrightarrow \frac{\delta}{C_2} = -\lambda \frac{1}{1+r}$$

On peut donc écrire

$$\frac{\partial U(.)}{\partial C_2} = \frac{\partial U(.)}{\partial C_1} \frac{1}{1+r} \Longleftrightarrow \frac{\frac{\partial U(.)}{\partial C_1}}{\frac{\partial U(.)}{\partial C_2}} = TMS = 1 + r$$

En reprenant l'expression de $U(.)$, il vient :

$$\frac{1/C_1}{\delta/C_2} = 1+r \Longleftrightarrow 1+r = \frac{C_2}{\delta C_1}$$

Question 3 Résoudre le programme dans le cas d'une solution intérieure. Déterminez C_1^* et L_1^*, en déduire C_2^*. 2 points

Comme $C_2 = R_2 + (w_1 L_1 - C_1)(1+r)$, le programme du consommateur peut se ré-écrire :

$$\begin{cases} max_{c_1,L_1} & U(C_1, R_2 + (w_1L_1 - C_1)(1+r)) \\ sc & C_1 + \frac{C_2}{1+r} = w_1 L + \frac{R_2}{1+r} \end{cases}$$

Le Lagrangien associé est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(.) =& ln(C_1) + ln(L - L_1) + \delta ln(R_2 + (w_1L_1 - C_1)(1+r)) \\ &+ \lambda \left[C_1 + \frac{R_2 + (w_1L_1 - C_1)(1+r)}{1+r} - w_1L_1 - \frac{R_2}{1+r} \right] \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{L}(.) = ln(C_1) + ln(L - L_1) + \delta ln(R_2 + (w_1L_1 - C_1)(1+r)) \end{aligned}$$

En remplacant C_2 par son expression trouvée précedemment, la contrainte a été incroporée, il ne s'agit plus que de maximiser la fonction ci-dessus. Les conditions du premier ordre sont

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{C_1} = \frac{\delta(1+r)}{R_2 + (w_1L_1 - C_1)(1+r)}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{L - L_1} = \frac{\delta w_1(1+r)}{R_2 + (w_1L_1 - C_1)(1+r)}$$

Il faut donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} C_1\delta(1+r) = R_2 + (w_1L_1 - C_1)(1+r) \\ \delta w_1(1+r)(L - L_1) = R_2 + (w_1L_1 - C_1)(1+r) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} C_1\delta(1+r) = R_2 + (w_1L_1 - C_1)(1+r) \\ C_1\delta(1+r) = \delta w_1(1+r)(L - L_1) \end{cases} \Longleftrightarrow w_1L_1 = w_1L - C_1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} C_1\delta(1+r) = R_2 + (w_1L - C_1)(1+r) - C_1(1+r) \\ L_1 = L - \frac{C_1}{w_1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1\,(2+\delta)\,(1+r) = R_2 + w_1 L\,(1+r) \\ L_1 = L - \frac{C_1}{w_1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1^* = \frac{R_2 + w_1 L(1+r)}{(2+\delta)(1+r)} \\ L_1^* = \frac{Lw_1(1+r)(1+\delta) - R_2}{w_1(2+\delta)(1+r)} \end{cases}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} C_2^* &= R_2 + (w_1 L_1^* - C_1^*)\,(1+r) \\ &= R_2 + \frac{Lw_1\,(1+r)\,(1+\delta) - 2R_2 - w_1 L\,(1+r)}{2+\delta} \\ &= \frac{Lw_1\,(1+r)\,\delta + \delta R_2}{2+\delta} \\ &= \frac{\delta}{2+\delta}\,(Lw_1\,(1+r) + R_2) \end{aligned}$$

Question 4 Comment varient C_1^*, L_1^* et C_2^*lorsque le taux d'intérêt augmente ? Commentez brièvement. 2 points

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1^*}{\partial r} &= \frac{w_1 L\,(2+\delta)\,(1+r) - (2+\delta)\,(R_2 + w_1 L\,(1+r))}{((2+\delta)\,(1+r))^2} \\ &= \frac{-R_2}{(2+\delta)\,(1+r)^2} && < 0 \\ \frac{\partial L_1^*}{\partial r} &= \frac{w_1\,(2+\delta)\,(1+r)\,(1+\delta)\,Lw_1 - w_1\,(2+\delta)\,(Lw_1\,(1+r)\,(1+\delta) - R_2)}{(w_1\,(2+\delta)\,(1+r))^2} \\ &= \frac{R_2}{w_1\,(2+\delta)\,(1+r)^2} && > 0 \\ \frac{\partial C_{2*}}{\partial r} &= \frac{\delta}{2+\delta} L w_1 && > 0 \end{aligned}$$

La hausse du taux d'intérêt a un effet négatif sur la demande en bien de consommation en première période, mais un effet positif sur l'offre de travail et la demande de bien de consommation en période 2. La hausse du taux d'intérêt accroît en effet le coût d'opportunité du loisir en période 1 et de la consommation du bien dans cette même période.

Question 5 Pour quelle valeur de r l'agent n'est-il ni emprunteur, ni prêteur ? 1 point

L'agent n'est ni emprunteur ni prêteur si la consommation de première période est égale au revenu de première période :

$$C_1^* = w_1 L_1^*$$

$$\iff \frac{R_2 + w_1 L(1+r)}{(2+\delta)(1+r)} = \frac{Lw_1(1+r)(1+\delta) - R_2}{(2+\delta)(1+r)}$$

$$\iff R_2 + w_1 L(1+r) = Lw_1(1+r)(1+\delta) - R_2$$

$$\iff 2R_2 = Lw_1(1+r)\delta$$

$$\iff 1 + r = \frac{2R_2}{\delta L w_1}$$

On retrouve le même résultat en cherchant r tel que :

$$C_2^* = R_2$$

$$\iff \frac{\delta}{2+\delta}(Lw_1(1+r) + R_2) = R_2$$

$$\iff \delta L w_1(1+r) + \delta R_2 = 2R_2 + \delta R_2$$

$$\iff \delta L w_1(1+r) = 2R_2$$

$$\iff 1 + r = \frac{2R_2}{\delta L w_1}$$

Question 6 Commentez le résulat de la question précédente. 1 point
Indication : Comparez à l'expression trouvée à la question 2.

On vient de montrer que $1 + r = \frac{2R_2}{\delta L w_1}$ si l'agent n'est ni emprunteur, ni prêteur. Cette expression correspond à celle de la question 2 (égalisation du TMS intertemporel avec le taux d'intérêt), avec $C_2 = R_2$ et $C_1 = Lw_1/2$.

En effet, si l'on fait abstraction du choix intertemporel de l'agent, en supposant qu'il doit consommer à chaque période ses revenus courants, on en déuit immédiatement $C_2 = R_2$. Par ailleurs, le choix de la consommation en première période se déduit d'un arbitrage consommation - loisir.

Le problème est donc de maximiser $U(.) = ln(C_1) + ln(L - L_1)$ sous la contrainte $w_1.L = w_1.L_1 + C_1$. Le Lagrangien associé est alors :

$$\mathcal{L}(.) = ln(C_1) + ln(L - L_1) + \lambda[w_1.L - w_1.L_1 - C_1]$$

Les conditions du premier ordre sont alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = \frac{1}{C_1} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = \frac{-1}{L_1} - \lambda w_1 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w_1 L - w_1 L_1 - C_1 = 0$$

Les deux premières conditions permettent d'écrire $C_1 = L_1 w_1$.

A l'aide de la troisième conditions, on peut en déduire $L_1 = \frac{L}{2}$ et $C_1 = w_1 \frac{L}{2}$.