Fondements de l'Analyse Économique
Cours de Nicolas Drouhin
Travaux Dirigés 2010-2011
Énoncés

Cécile Martin - cecile.martin@ens-cachan.fr
Marc Sangnier - marc.sangnier@ens-cachan.fr

Septembre 2010

École Normale Supérieure de Cachan - Département Économie Gestion

Cette brochure a été construite par Alexandre de Cornière et Marc Sangnier. Les exercices présentés sont soit des créations des auteurs, soit tirés de l'ouvrage *Microeconomic Theory* (A. Mas-Colell, M. Whinston & J. Green - Oxford University Press), soit inspirés des travaux dirigés de Laurent Simula et Camille Thubin à l'EHESS, soit des annales des partiels du cours.

Table des matières

1 Représentation des préférences

1.1 Rationalité

Une relation de préférence $\succeq$ est dite rationnelle si et seulement si elle est complète et transitive.

Proposition :
Si $\succeq$ est rationnelle, alors :
(1) $\succ$ est à la fois transitive et non-réflexive ;
(2) $\sim$ est réflexive, transitive et symétrique ;
(3) si $x \succ y \succeq z$, alors $x \succ z$.

Question 1 Démontrez la propriété (3).

Question 2 Démontrez les propriétés (1) et (2).

1.2 Fonction d'utilité à élasticité constante

On appelle fonctions CES (Constant Elasticity of Substitution) une fonction d'utilité $u(x_1; x_2)$ de la forme suivante :

$$u(x_1; x_2) = [\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho]^{1/\rho}$$

Question 1 Expliquez pourquoi on dit qu'une fonction de cette forme est à élasticité de substitution constante.

Question 2 Montrez que si $\rho = 1$, alors les courbes d'indifférences associées à cette fonction sont linéraires.

Question 3 Montrez que si $\rho \to 0$, alors cette fonction représente les même préférences que la fonction Cobb-Douglas $v(x_1; x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$.

Question 4 Montrez que si $\rho \to -\infty$, alors les courbes d'indifférences associées à cette fonction sont "à angle droit", c'est à dire que cette fonction tend à présenter la même carte d'indifférence que la fonction de Leontieff $w(x_1; x_2) = min\{x_1; x_2\}$.

1.3 Monotonie et non-saturation

Soit $X = R_+^L$ l'ensemble des paniers de biens, et soit $\succeq$ une relation de préférence sur X.
On dit que $\succeq$ est *monotone* si $\forall (x, y) \in X^2, y \gg x \Longrightarrow y \succ x$.
On dit que $\succeq$ est *strictement monotone* si $\forall (x, y) \in X^2$, $(y \geq x$ et $y \neq x)$ $\Longrightarrow y \succ x$.

Question 1 Montrer que si $\succeq$ est strictement monotone alors $\succeq$ est monotone.

Question 2 $\succeq$ est dite *localement non-saturée* si $\forall x \in X$ et $\forall \epsilon > 0$, il existe un y tel que $||y - x|| \leq \epsilon$ et $y \succ x$.
Rappel : $||x - y||$ est la norme euclidienne du vecteur $x - y$, égale à $[\sum_{i=1}^{L}(x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$.
Montrer que si $\succeq$ est monotone alors $\succeq$ est localement non-saturée.

1.4 Propriétés de la fonction d'utilité Cobb-Douglas généralisée

On étudie dans un espace à deux dimensions les propriétés de la fonction d'utilité suivante, dite fonction d'utilité Cobb-Douglass généralisée :

$$u\left(x_1; x_2\right) = x_1^a x_2^b$$

avec a et b strictement positifs.

Question 1 Montrez que $u\left(.\right)$ est strictement quasi-concave. A quelle condition est-elle concave ?

Question 2 Que peut-on dire de la fonction d'utilité $u\left(x_1; x_2\right) = x_1 x_2^{b/a}$? Quelle réflexion cela vous inspire-t-il ?

2 Théorie de la demande

2.1 Maximisation d'une fonction d'utilité

Un individu dont la richesse est w consomme deux biens en quantités x_1 et x_2. Le prix du bien 1 est p_1, celui du bien 2 est p_2. Les préférences de cet agent sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1; x_2) = (x_1 + \alpha)(x_1 + x_2) \qquad \textit{avec} \quad \alpha > 0$$

Question 1 Représentez la carte d'indifférence de ce consommateur.

Question 2 Écrivez le programme de ce consommateur et résolvez-le.

Question 3 Représentez et étudiez la courbe d'Engel pour les deux biens.

2.2 Fonction d'utilité Stone-Geary (partiel 2007-2008)

Les préférences d'un individu sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1; x_2) = (x_1 + 1)^{\alpha} (x_2 + 1)^{\alpha}$$

avec $\alpha > 0$.

Question 1 Calculez le taux marginal de substitution associé à cette fonction d'utilité. Donnez sa valeur numérique au point $(0; 1)$.

Question 2 Soient R le revenu de l'individu, p_1 et p_2 les prix des biens. On suppose $R = 1$, $p_1 = 3$ et $p_2 = 1$. Donnez sans aucun calcul le panier de bien qui sera choisi par l'individu dans cette situation.

Question 3 On traite maintenant le cas général :

$$U(x_1; x_2) = (x_1 + \gamma_1)^{\alpha} (x_2 + \gamma_2)^{\beta}$$

avec γ_1 et γ_2 des constantes positives. Écrivez le programme de l'individu. Écrivez le Lagrangien généralisé ainsi que les conditions du premier ordre. Donnez l'expression complète des fonctions de demande.

2.3 Propriétés de la demande marshallienne

Soit u une fonction d'utilité représentant une relation de préférence $\succeq$ localement non-saturée sur $X = R_+^L$. Soit $x(p, w)$ l'ensemble des paniers de consommation qui maximisent l'utilité du consommateur sous-contrainte budgétaire.

Question Montrer que $x(p,w)$ vérifie les propriétés suivantes :
- Homogénéité de degré zéro en (p,w) : $x(\alpha p, \alpha w) = x(p,w)$ pour tout p, w et tout $\alpha > 0$.
- Loi de Walras : $px(p,w) = w$.
- Convexité/unicité : si $\succeq$ est convexe (i.e u quasi-concave)[1] alors $x(p,w)$ est un ensemble convexe. Si $\succeq$ est strictement convexe (i.e u strictement quasi-concave), alors $x(p,w)$ contient un seul élément.

2.4 Lagrangien et prix implicite

Supposons que la demande marshallienne du consommateur est une fonction dérivable $x(p,w) \gg 0$. Soit λ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de budget.

Question 1 Rappeler les conditions (nécessaires) de Kuhn et Tucker dans le cas d'une solution intérieure.

Question 2 En utilisant les règles de calculs sur les dérivées de fonctions composées, calculer l'effet marginal d'une augmentation de w sur l'utilité du consommateur.

2.5 Propriétés de la demande hicksienne

Soit u une fonction d'utilité représentant une relation de préférence $\succsim$ localement non-saturée sur $X = R_+^L$. Soit $h(p,u)$ l'ensemble des paniers de biens minimisant la dépense sous contrainte d'une utilité supérieure ou égale à u.

Question 1 Montrer les propriétés suivantes :
- Homogénéité de degré zéro en p : $h(\alpha p, u) = h(p,u)\ \forall \alpha > 0$.
- $\forall x \in h(p,u)$, $u(x) = u$.
- Convexité/unicité : si $\succsim$ est convexe (i.e u quasi-concave) alors $h(p,u)$ est un ensemble convexe. Si $\succeq$ est strictement convexe (i.e u strictement quasi-concave), alors $h(p,u)$ contient un seul élément.
- Si $\succeq$ est strictement convexe, alors $\forall p', p''$, $(p''-p').[h(p'',u)-h(p',u)] \leq 0$.

Question 2 Supposons que $\succeq$ est strictement convexe , et que la demande hicksienne $h(p,u)$ est une fonction dérivable et que tous ses composants sont strictement positifs. Montrer que $h_l(p,u) = \partial e(p,u)/\partial p_l$ pour tout $l \in \{1, ..., L\}$, où $e(p,u)$ est la fonction de dépense.

[1] u quasi-concave signifie : $\forall(x,y), \forall\alpha \in]0;1[, u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq min(u(x), u(y))$. La stricte quasi-concavité signifie que l'inégalité est stricte.

2.6 La dualité

Soit un agent qui consomme L biens différents en quantités x_l, avec $l = 1, ..., L$. Son ensemble de consommation est $X = \prod_{l=1}^{L} [a_l; +\infty[$ avec $\forall l, \quad a_l > 0$. Ses préférences sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1; ...; x_L) = k \prod_{l=1}^{L} (x_l - a_l)^{\alpha_l}$$

avec $k > 0$, $\forall l \quad \alpha_l > 0$ et $\sum_{l=1}^{L} \alpha_l = 1$. Le vecteur des prix est $p = (p_1; ...; p_L)$.

Question 1 Donnez une interprétation économique de "$\forall l \quad a_l > 0$".

Question 2 On suppose maintenant que la richesse du consommateur w est telle que $w > \sum_{l=1}^{L} p_l a_l$. Donnez la demande Marshalienne $x_l(p; w)$ pour chaque bien l. Vérifiez que ces demandes sont homogènes de degré 0 par rapport aux prix p et à la richesse w et que la loi de Walras est satisfaite.

Question 3 Donnez la fonction d'utilité indirecte de ce consommateur.

Question 4 Donnez la fonction de dépense $e(p; \bar{u})$ de ce consommateur et sa fonction de demande Hicksienne $h_l(p; \bar{u})$ pour chaque bien l.

Question 5 On suppose maintenant que $L = 2$. La fonction de dépense du consommateur est donc :

$$e\left(p; \bar{U}\right) = a_1 p_1 + a_2 p_2 + e^{\bar{u}} \delta^{-\delta} (1 - \delta)^{-(1-\delta)} p_1^{\delta} p_2^{1-\delta}$$

avec $\delta = \alpha_1 / (\alpha_1 + \alpha_2)$.
Donnez la fonction d'utilité indirecte de ce consommateur.

Question 6 Utilisez l'identité de Roy pour trouver les demandes Marshaliennes.

Question 7 Donnez les fonctions de demande Hicksiennes. Vérifiez le lemme de Shepard.

2.7 Élasticités (partiel 2008-2009)

Soit un consommateur qui a accès à deux biens de consommation : les pâtes et la viande. Une étude économétrique a permis de montrer que dans le conditions actuelles de prix et de revenu, on a :
- $s_v = 0,2$ le coefficient budgétaire de la viande,
- $\varepsilon_{vR} = 1,5$ l'élasticité revenu de la demande Marshallienne de viande,
- $\varepsilon_{vv} = -0,6$ l'élasticité prix de la demande Marshallienne de viande.

Question Calculez :
- Ω_{vv} l'élasticité prix de la demande Hicksienne de viande,
- s_p le coefficient budgétaire des pâtes,
- ε_{pR} l'élasticité revenu de la demande Marshalienne de pâtes,
- Ω_{vp} l'élasticité prix croisée de la demande hicksienne de viande,
- Ω_{pp} l'élasticité prix de la demande hicksienne de pâtes,
- ε_{pp} l'élasticité prix de la demande marshalienne de pâtes.

2.8 Offre de travail des femmes mariées

On s'intéresse au choix des femmes mariées de travailler ou non. Cette décision dépend de plusieurs paramètres : le salaire de leur mari, le salaire qu'elle peuvent gagner en travaillant, ainsi que la valeur qu'elles accordent à leur temps de loisir.
En particulier, une femme décidera de travailler si le salaire horaire qu'on lui propose est supérieur à la valeur qu'elle accorde à une heure de loisir.

Partie 1

Considérons le modèle suivant. Madame Z a une utilité qui dépend de deux éléments : la quantité x de bien qu'elle consomme (chaque unité du bien est vendue au prix p) et le temps de loisir L dont elle dispose. Son utilité s'écrit

$$U(x, L) = \alpha ln(x) + (1 - \alpha) ln(L)$$

Son mari lui donne une somme R_0 indépendamment de sa décision de travailler. Elle dispose de T_0 heures, qu'elle peut répartir entre travail et loisir. Son salaire horaire si elle décide de travailler est w.

Question 1 Écrire la contrainte de budget de Madame Z.

Question 2 Calculer la demande Marshallienne de bien et celle de loisir. Déterminer son offre de travail, c'est-à-dire le nombre d'heures qu'elle souhaite travailler.

Question 3 Montrer qu'il existe un salaire $\overline{w}$ en-dessous duquel Madame Z ne souhaite pas travailler. Ce salaire est appelé salaire de réserve. Comment le salaire de réservation varie-t-il avec α, p, R_0 et T_0 ?

Question 4 Calculer l'utilité indirecte de Madame Z, notée $V(w, T_0, R_0)$.

Question 5 La valeur que Madame Z accorde au temps est

$$V' = \frac{\frac{\partial V(w,T_0,R_0)}{\partial T_0}}{\frac{\partial V(w,T_0,R_0)}{\partial R_0}}$$

Interpréter V'. Montrer que $V' = max\{w, \overline{w}\}$.

Partie 2

On s'intéresse maintenant à l'arbitrage consommation-loisir pour des fonctions d'utilité $U(x, L)$ ayant les “bonnes" propriétés. La contrainte de budget est la même que pour la partie 1.

Question 1 Comment varient x et L lorsque w varie ?

Question 2 Montrer que si le bien de consommation est un bien normal, x augmente lorsque w augmente. Est-ce pareil pour L ? Interpréter dans les deux cas.

Partie 3

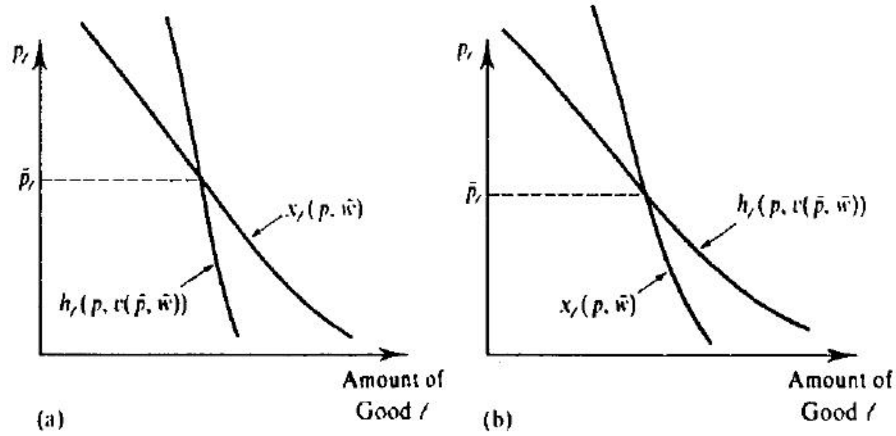
On suppose à présent que Madame Z a la possibilité d'effectuer du travail domestique et ainsi de produire elle-même le bien de consommation. Notons x_A la quantité de bien *achetée* et x_D la quantité de bien produite *domestiquement* par Madame Z. On a donc $x = x_A + x_D$.
Pour produire domestiquement le bien, Madame Z doit y consacrer du temps. On note h_D le nombre d'heures consacrées au travail domestique. La fonction de production domestique est $x_D = f(h_D)$, avec $f' > 0$ et $f'' < 0$.
On note désormais h_T le nombre d'heures travaillées à l'extérieur, et l'on a ainsi $T_0 = h_D + h_T + L$.

Question 1 Écrire la contrainte budgétaire de Madame Z.

Question 2 Écrire le programme de Madame Z, en précisant bien les variables de décision.

Question 3 Montrer, à partir de la contrainte budgétaire, que le choix du nombre d'heures travaillées domestiquement h_D^* ne dépend que de $f(.)$, p et w. Que vaut h_D^* ? Commenter.

FIG. 1 – Demandes marshalienne $x_l(p,\bar{w})$ et hicksienne $h_l(p, v(\bar{p},\bar{w}))$ pour deux biens.



2.9 Identités (partiel 2009-2010)

Un consommateur a la fonction d'utilité indirecte suivante :

$$V(p_1; p_2; R) = \frac{R^\alpha}{p_1^\alpha} + \frac{R^\alpha}{p_2^\alpha}.$$

Question 1 Donnez les fonctions de demande marshaliennes.

Question 2 Donnez la fonction de dépense.

Question 3 Donnez les fonctions de demande compensées (hicksiennes).

Question 4 Retrouvez la fonction d'utilité de ce consommateur.

2.10 Biens inférieur et bien normal (contrôle continu 2009-2010)

Répondez aux deux questions suivantes :

Question 1 Rappelez la définition d'un bien inférieur et d'un bien normal.

Question 2 Le graphique 1 ci-joint représente les demandes marshalienne $x_l(p,\bar{w})$ et hicksienne $h_l(p, v(\bar{p},\bar{w}))$ pour deux biens $l = a, b$. Pour chacun de ces biens, déterminez s'il est normal ou inférieur. Justifiez vos réponses.

2.11 Demande normale (partiel 2009-2010)

Une fonction d'utilité est dite additivement séparable si elle peut s'écrire sous la forme :

$$U(x_1; x_2) = u(x_1) + v(x_2)$$

avec $u(.)$ et $v(.)$ des fonctions croissantes et concaves.

Question 1 Montrez que si un individu a de telles préférences, ses fonctions de demandes pour les biens 1 et 2 sont nécessairement normales, i.e., les biens 1 et 2 sont des biens normaux.

Question 2 En irait-il de même si la fonction d'utilité était multiplicativement séparable ?

3 Théorie du producteur

3.1 Quelques fonctions de production

Soit un output produit à partir de deux inputs. On note z_1 et z_2 les quantités respectives d'inputs utilisées pour la production. On note w_1 et w_2 les prix respectifs d'une unité d'input 1 et 2. On note q la quantité d'output produit. Calculer la fonction de coût $c(w_1, w_2, q)$ ainsi que les fonctions de demande conditionnelle de facteurs $z_1(w_1, w_2, q)$ et $z_2(w_1, w_2, q)$ lorsque la fonction de production est donnée par :

Question 1 $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ (inputs parfaitement substituables)

Question 2 $f(z_1, z_2) = Min\{z_1, z_2\}$ (fonction de production Leontieff)

Question 3 $f(z_1, z_2) = (z_1^\rho + z_2^\rho)^{1/\rho}$ (technologie CES)

3.2 Questions en vrac

Répondez aux questions suivantes.

Question 1 Soient f et g deux fonctions de productions définies par

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = min\{ax_1, bx_2\} & \text{avec } a > 0 \text{et } b > 0 \\ g(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} & \text{avec } \alpha \in]0;1[\end{cases}$$

Déterminez et tracez quelques isoquantes pour ces deux fonctions de production.

Question 2 Montrez que la fonction $f(K, L) = K^2 + \sqrt{L}$ avec $K > 0$ et $L > 0$ ne représente ni une fonction de production à rendements constants, ni une fonction de production à rendements croissants, ni une fonction de production à rendements décroissants.

Question 3 Supposons que la fonction de coût associée à une certaine technologie est différentiable. Montrez que le coût moyen augmente (resp. diminue) avec la quantité lorsque le coût marginal est supérieur (resp. inférieur) au coût moyen.

3.3 Fonction de production Stone-Geary (partiel 2006-2007)

Soit une entreprise dont la technologie de production est représentée par la fonction suivante :

$$y = f(x_1; x_2) = (x_1 + \gamma_1)^\alpha (x_2 + \gamma_2)^\beta$$

avec γ_1 et γ_2 des constantes positives.

Question 1 Cette fonction de production est-elle homogène ?

Question 2 Pour un couple $(x_1; x_2)$ donné, calculez l'élasticité du produit par rapport à chacun des facteurs de production. Comment varie cette élasticité quand la quantité du facteur varie de 0 à l'infini ?

Question 3 Pour un couple $(x_1; x_2)$ donné, calculez l'élasticité de l'échelle de production. A quelle condition les rendements d'échelle locaux sont-ils décroissants en ce point ?

Question 4 Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que les rendements d'échelle soient toujours décroissants.

3.4 Fonctions de coût de court et long-terme

Soit une firme ayant une fonction de production égale à

$$y = (x_1^p + x_2^p)^{1/p}, \quad p < 1$$

Question 1 Quels sont les rendements d'échelle lorsque :
- chaque facteur de production peut varier librement ?
- l'input 2 est fixe ? (Parler de rendements d'échelle dans cette configuration est évidemment abusif, vous analyserez donc l'équivalent des rendements d'échelle dans cette situation.)

Question 2 A court terme la quantité d'input 2 est fixée à $x_2 = \overline{x}$. Déterminer la fonction de coût $C(w_1, w_2, y, \overline{x})$ où w_i représente le prix du facteur i. Commenter la relation entre coût et niveau de production.

Question 3 A long terme la firme choisit librement ses niveaux d'inputs. Calculer la fonction de coût $C(w_1, w_2, y)$. Commenter la relation entre coût et niveau de production.

Question 4 Pour chaque niveau de production y, montrer que le coût de production de long terme est celui qui correspond au minimum du coût de court terme par rapport à l'input fixe, c'est-à-dire

$$C(w_1, w_2, y) = \min_{\overline{x}}\{C(w_1, w_2, y, \overline{x})\}$$

Application numérique : $w_1 = w_2 = 1$, $p = 1/2$. Représenter graphiquement la situation. Commenter.

3.5 Durée du travail (partiel 2006-2007)

Partie 1

Une entreprise décide de sa politique d'embauche qui est définie par deux paramètres : N, le nombre de ses employés et T, le temps de travail de chacun de ses employés. Le temps de travail ne peut être supérieur à un maximum T_{max}. La fonction de production de la firme est :

$$F(N;T) = AN^{\alpha} f(T)^{\alpha}$$

avec $\alpha \in]0;1[$et $A > 0$. On suppose également que $f(0) = 0$, $f'(T) > 0$ et qu'il existe T_0 tel que $T < T_0 \Rightarrow f''(T) > 0$, $T = T_0 \Rightarrow f''(T) = 0$ et $T > T_0 \Rightarrow f''(T) < 0$. On admet que la fonction $f(.)$ admet une asymptote horizontale. Enfin, on considère que l'entreprise est relativement petite par rapport aux marchés des biens et du travail, elle prend donc le prix de vente de son produit, noté p, et le salaire horaire, noté w, comme donnés.

Question 1 Donnez l'interprétation économique de chaque paramètre de la fonction de production. Représentez graphiquement l'allure générale de cette fonction. Donnez une interprétation économique du rapport $f(T)/T$. Pour quelle condition sur T ce rapport est-il maximal ? Donnez-en une interprétation sur le graphique précédent.

Question 2 Écrivez la fonction de profit de l'entreprise et son programme de maximisation. Écrivez le Lagrangien généralisé correspondant.

Question 3 En supposant qu'il existe une solution intérieure, écrivez les conditions du premier ordre du programme de maximisation du profit de l'entreprise et interprétez-les. Montrez que la durée de travail optimale du point de vue de l'entreprise, notée T_{opt}, de dépend pas du niveau d'emploi. Quelle relation simple caractérise T_{opt} ? Utilisez-la pour vérifier que T_{opt} est bien un maximum (condition du second ordre).

Question 4 Supposez maintenant qu'il existe une durée légale maximale du travail, appelée T_{leg}, et que $T_{leg} < T_{opt}$. Écrivez le programme de maximisation du profit de l'entreprise. Écrivez le Lagrangien généralisé de ce problème. Donnez les conditions du premier ordre. Expliquez pourquoi la contrainte de durée est nécessairement saturée. Comment peut-on interpréter le multiplicateur de Kuhn et Tucker associé à cette contrainte ? Quel est l'effet de la mise en place de la durée légale du travail sur le profit de l'entreprise.

Question 5 Exprimez N, la demande de travail de l'entreprise. Pour un salaire réel donné, comment varie la demande de travail de la firme quand la durée légale du travail diminue ?

Partie 2

On examine maintenant l'effet d'une réduction du temps de travail sur l'offre de travail. A cette fin, nous utilisons le modèle d'arbitrage travail-loisir.

Dans un premier temps, nous supposons que les agents ne subissent pas de contrainte autre que physiologique. Leur programme s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{c} Max \quad U\left(C; T_{max} - T\right) \\ sc \quad R + wT - pC = 0 \quad et \quad T \geq 0 \end{array} \right.$$

où R représente les revenus non salariaux de l'agent. On suppose par ailleurs que la fonction $U\left(.\right)$ est croissante en chacun de ses arguments et strictement quasi-concave.

Question 1 Écrivez le Lagrangien généralisé de ce programme. Écrivez-en les conditions de premier ordre.

Question 2 Lorsque la contrainte de durée n'est pas saturée ($T > 0$), à quoi est égal le salaire réel ?

Question 3 Étudions maintenant le cas où la contrainte de durée est saturée. A quoi est égal le salaire de réserve ? Comment varie-t-il en fonction de R ?

Question 4 Supposons maintenant que l'agent se voit imposer une durée de travail $\bar{T}$. Il a le choix entre travailler $\bar{T}$ et ne pas travailler du tout. Puisque son choix est discret, il suffit de comparer son utilité dans les deux situations pour connaître sa décision. Quelle est l'utilité de l'agent qui travaille ? Quelle est l'utilité de l'agent qui ne travaille pas ? A quelle condition un agent décide-t-il de travailler ? Quelle est la condition que doit vérifier le salaire de réserve ? En différenciant cette condition, étudiez comment varie le salaire de réserve en fonction de R et de $\bar{T}$. En supposant le salaire invariant, quel peut-être l'effet d'une diminution de $\bar{T}$ sur l'offre de travail agrégée ?

Question 5 Pour étudier l'effet du temps de travail sur le bien-être nous allons étudier le programme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} Max \quad U\left(C; T_{max} - T\right) \\ sc \quad R + wT - pC \geq 0 \quad et \quad T \leq \bar{T} \end{array} \right.$$

Écrivez le Lagrangien de ce programme. Comment peut-on interpréter le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de durée ? Quel est l'effet de la contrainte de durée sur le bien-être ?

3.6 Rendements constants (contrôle continu 2009-2010)

Une entreprise possède deux usines ayant chacune des technologies Cobb-Douglas à rendements constants (mais non-nécessairement identiques).

Question Écrire le programme permettant de calculer la fonction de coût de cette entreprise, et décrire brièvement la façon dont on peut le résoudre.

4 Théorie des prix et équilibre général en concurrence parfaite

4.1 Équilibre général Walrasien

Soit une économie composée de deux biens (1 et 2) et de deux consommateurs (A et B). Les préférences de ces deux individus sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U^A(x) = \frac{1}{3}ln(x_1) + \frac{2}{3}ln(x_2)$$

$$U^B(x) = \frac{3}{4}ln(x_1) + \frac{1}{4}ln(x_2)$$

Les dotations initiales des agents sont respectivement $e^A = (3; 9)$ et $e^B = (8; 12)$.

Question 1 Déterminez l'ensemble des allocations optimales au sens de Pareto.

Question 2 Déterminez l'équilibre walrasien de cette économie.

Question 3 Vérifiez que cet équilibre est optimal au sens de Pareto.

Question 4 Vérifiez que l'allocation $x^A = \left(x_1^A; x_2^A\right) = (5,5; 18)$, $x^B = \left(x_2^B; x_2^B\right) = (5,5; 3)$ est optimale au sens de Pareto. Déterminez les transferts nécessaires pour décentraliser cette allocation en un équilibre concurrentiel.

Question 5 On ajoute à l'économie un producteur qui transforme le bien 1 en bien 2. Sa technologie de production est $y_2 = 4y_1$. Déterminez l'équilibre walrasien de cette économie.

4.2 Optima de Pareto

Soit une économie composée de deux biens (1 et 2) et de deux consommateurs (A et B). Les préférences de ces deux individus sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U^A\left(x_1; x_2\right) = x_1 x_2$$

$$U^B\left(x_1; x_2\right) = x_1 + x_2$$

Les quantités disponibles de bien 1 et 2 sont respectivement $\Omega_1 = 1$ et $\Omega_2 = 2$.

Question 1 Représentez cette économie dans un boîte d'Edgeworth.

Question 2 Déterminez l'ensemble des allocations optimales au sens de Pareto.

4.3 Optimum de Pareto et bien public

Soit une économie composée de deux agents (A et B) dont les préférences sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U^A\left(g;x^A\right) = 2ln(g) + ln(x^A)$$

$$U^B\left(g;x^B\right) = ln(g) + 2ln(x^B)$$

avec $g > 0$ la quantité d'un bien public pur et x^i la consommation privée de l'agent i. La production de g unités du bien public a pour coût $C\left(g\right) = g$. Le revenu total de chaque consommateur est de 15. t_i est la contribution de l'agent i au bien public.

Question 1 Définissez en quoi consiste une allocation pour cette économie. Quel est l'ensemble des allocations réalisables ?

Question 2 Montrez qu'en n'importe quelle allocation optimale au sens de Pareto, on a :

$$\frac{\partial U^A/\partial g}{\partial U^A/\partial x^A} + \frac{\partial U^B/\partial g}{\partial U^B/\partial x^B} = C'\left(g\right)$$

Utilisez cette condition de Bowen-Lindhal-Samuelson pour caractériser l'ensemble des allocation optimales au sens de Pareto. Dans cet ensemble, déterminez l'allocation telle que les deux agents contribuent de la même façon à la production du bien public ($t_A = t_B$).

Question 3 On suppose maintenant qu'il existe pour chaque agent un marché du bien public tel qu'il est ressenti par le consommateur. En fait, on suppose que la consommation du bien public par chaque agent forme un bien distinct avec son propre marché. On introduit donc un prix personnalisé p_i qui s'adresse à l'agent i. Dans cette configuration, un équilibre de Lindhal correspond a une situation dans laquelle les deux agents demandent la même quantité de bien public et où la firme qui le produit maximise son profit. Déterminez cet équilibre et montrez qu'il est optimal au sens de Pareto.

Question 4 La production du bien public est maintenant déterminée par une souscription volontaire. Chaque individu i décide librement du montant t_i de sa contribution. Quelle est l'allocation résultant de ce processus ? Est-elle optimale au sens de Pareto ?

5 Analyse de bien-être et surplus du consommateur

5.1 Problème d'imposition

Soit un consommateur pouvant consommer 2 biens, notés 1 et 2, en quantités x_1 et x_2. Le vecteur de prix est $p = (p_1; p_2)$, et le revenu exogène du consommateur est w. Ses préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

Question 1 Choix optimal du consommateur.
- Les préférences représentées par U sont-elles convexes ?
- Calculer les demandes marshalliennes pour les deux biens, notées $x_1(p, w)$ et $x_2(p, w)$. Quel est l'impact d'une modification des prix et des revenus sur le comportement de consommation ?
- Application numérique : $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $w = 6$. Quelles sont les demandes marshalliennes ? On conservera ces valeurs numériques par la suite.

Question 2 Impôt sur le revenu : Le décideur public souhaite lever des impôts, mais il hésite entre deux mécanismes.
- Impôts indirects. Le décideur décide d'implémenter une taxe t sur le prix du bien 1 (de telle sorte qu'une somme $p_1 t$ est perçue pour chaque unité de bien 1 vendue). On suppose que $t = 1$. Comment sont affectées les demandes marshalliennes des deux biens ? Quels sont les effets à l'oeuvre ? Calculer la recette fiscale T générée par la taxe.
- Impôts sur le revenu. A présent le décideur public souhaite obtenir les mêmes recettes fiscales T en utilisant une taxe sur le revenu. Calculer le taux τ nécessaire pour obtenir T. Calculer les demandes marshalliennes et les comparer avec la situation sans taxes. Commenter.
- Représenter graphiquement, dans un plan (x_1, x_2), les trois cas envisagés (pas d'imposition, impôts indirects, impôts sur le revenu). Quelles seraient vos recommandations ?

5.2 Minimisation de la dépense et surplus du consommateur

Un consommateur a une fonction d'utilité de la forme suivante :

$$U(bx_1, x_2, ..., x_L)$$

où $b > 0$ est un paramètre représentant la “capacité à apprécier" le bien 1. L'élasticité de la demande pour le bien 1 par rapport à son prix est telle que $0 < \epsilon_{x_1,p_1} < 1$ et x_1 est un bien normal.

Question 1 Écrire le Lagrangien du programme de minimisation de la dépense sous contrainte d'utilité constante.

Question 2 Écrire la condition du premier ordre par rapport à x_1 seulement (ne pas éliminer le multiplicateur de Lagrange).

Question 3 À niveau d'utilité U constant, quel est l'effet d'une augmentation de b sur la dépense ?

Question 4 À niveau d'utilité U constant, une augmentation de b augmente-t-elle ou diminue-t-elle la demande de bien 1 ? Cela augmente-t-il le surplus que le consommateur retire du fait de pouvoir acheter x_1 au prix p_1 ?

Question 5 À niveau d'utilité U constant, exprimer le surplus que le consommateur retire du fait de pouvoir acheter x_k au prix p_k, $k \in \{2, ..., L\}$. Une hausse de b permet-elle d'augmenter tous ces surplus simultanément ?

5.3 Monopole et perte sèche

Soit un monopole qui produit un bien dont la demande inverse est $p(x) = a - bx$. La fonction de coût du monopole est $C(x) = cx$, avec $c < a$.

Question 1 Quels sont la quantité x^met le prix p^m résultant de la maximisation du profit de l'entreprise en situation de monopole ?

Question 2 Lorsque le coût marginal est égal au prix de vente, le surplus global est maximum. Déterminez x^c et le prix p^c de concurrence parfaite qui maximisent le surplus global.

Question 3 Déterminez le profit du monopole et la perte sèche qu'il engendre.

Question 4 Une subvention s sur les quantités est introduite. La fonction du monopole devient donc $C(x) = (c - s)x$. Quel doit être le montant de cette subvention pour que le monopole produise la quantité associée à la concurrence parfaite ?

6 Interactions stratégiques et concurrence imparfaite

6.1 Équilibre de Nash et optimum de Pareto

Les étudiants sont de gros travailleurs. Soit un groupe composé de I étudiants, chaque étudiant i passe h_i heures à travailler ses cours. Malheureusement, même si il adore la microéconomie, l'étudiant subit une détérioration $h_i^2/2$ de son utilité lorsqu'il travaille h_i heures. Son résultat dépend de la façon dont il travaille relativement à ses collègues. Il prend la forme $\phi\left(h_i/\bar{h}\right)$ avec $\bar{h}$ le travail moyen du groupe. $\phi(.)$ est une fonction concave telle que $\phi'(.) > 0$ et $lim_{h\rightarrow 0}\phi'(h) = +\infty$.

Question 1 Déterminez l'équilibre de Nash symétrique tel que $h_i = h^*$ pour tout i.

Question 2 Comparez ce résultat avec celui symétrique et optimal au sens de Pareto.

6.2 Duopole de Bertrand

On s'intéresse à un modèle développé à partir de l'idée de Bertrand selon laquelle les entreprises choisissent leurs prix plutôt que les quantités qu'elles produisent. Ici on envisage le cas de produits différenciés. Deux entreprises (1 et 2) choisissent les prix p_1 et p_2 (respectivement) . Les quantités demandées par les consommateurs aux deux firmes sont :

$$q_i(p_i; p_j) = a - p_i + bp_j$$

avec $b > 0$ qui reflète dans quelle mesure un bien est substitut de l'autre. Il n'y a pas de coûts fixes et le coût marginal c est constant, avec $0 < c < a$.

Question Les deux firmes cherchent à maximiser leur profit et fixent leur prix de façon simultanée. Déterminez l'équilibre de Nash de ce modèle.

6.3 Temps consacré à un examen (contrôle continu 2009-2010)

Un examen comporte N questions. Le temps consacré à l'ensemble de l'examen par un élève est $0 \leq t$. Ce temps ne peut excéder T minutes, d'où $t \leq T$. Le temps consacré à la question i est t_i. D'où $\sum_{i=1}^{N} t_i = t$. Le score S_i obtenu à la question $i = 1, ..., N$ dépend de la façon dont l'élève traite cette question. Ce score a tendance à s'accroître, ou du moins à ne pas décroître, avec le temps consacré à la question i, mais dépend également de la masse de connaissance K apportée à l'examen. D'où $S_i = S_i(t_i; K)$ avec $\partial S_i / \partial t_i \geq 0$ et $\partial S_i / \partial K > 0$. La note note finale G dépend du score total, défini par la somme des scores obtenus à chaque question : $G = \sum_{i=1}^{N} S_i$.

Question 1 La fonction d'utilité $U(.)$ d'un élève peut s'écrire :

$$U(.) = \sum_{i=1}^{N} S_i(t_i; K) - vt$$

avec $v > 0$.

Commentez brièvement l'expression de cette fonction d'utilité. Quel est le programme de maximisation d'un élève ? Écrivez le Lagrangien correspondant.

Question 2 Que peut-on dire des productivités marginales des fonctions S_i à l'optimum dans le cas d'une solution intérieure $(t > 0)$?

Question 3 Supposons que toutes les fonctions S_i sont de la forme $S_i = t_i^{\alpha} K$ avec $\alpha > 0$. A quelle(s) condition(s) un élève quitte-t-il l'examen avant l'heure limite ?
Indication : trouvez l'expression générale de la fonction d'utilité et discutez par la suite selon les valeurs de α.
Dans le cas où $\alpha = 1$, vous répondrez à la question suivante : les "cancres" et les "têtes" (caractérisés respectivement par $K = K^-$ et $K = K^+$, avec $K^- < K^+$) quittent-ils la salle en avance ?

7 Temps et incertitude

7.1 Économie d'échange pur

Soit une économie composée de deux individus $i = A, B$ et deux périodes $t = 0, 1$. Les quantités consommées sont notées c_t^i. Les deux individus ont la même fonction d'utilité :

$$U\left(c_0^i; c_1^i\right) = u\left(c_0^i\right) + \delta u\left(c_1^i\right)$$

avec $u\left(c\right) = ln\left(c\right)$ et $\delta = \frac{1}{1+j}$. La dotation initiale de l'individu i est $w^i = \left(w_0^i; w_1^i\right)$, on suppose que les deux individus n'ont pas les même dotations.

Question 1 Montrez que le taux d'intérêt d'équilibre ne dépend que du taux de croissance de cette économie, c'est à dire le taux de croissance des ressources disponibles (ici, les dotations initiales), et des préférences des agents.

Question 2 Quel est l'effet d'un accroissement du taux d'impatience j sur le taux d'intérêt d'équilibre ? Quel est l'effet d'un accroissement de la richesse initiale ?

Question 3 Comment varie l'épargne avec le taux d'impatience j ?

7.2 Hypothèse du revenu permanent et fonction d'épargne

Soit une économie fermée à deux périodes $(t = 1, 2)$ composée d'un agent représentatif dont les préférences intertemporelles sont représentées par la fonction suivante :

$$U\left(c_1; c_2\right) = ln\left(c_1\right) + \beta ln\left(c_2\right)$$

L'agent reçoit le revenu y_i au cours de la période i.

Question 1 Déterminez le taux d'intérêt d'équilibre r^* de cette économie. Quelle est sa valeur si $y_1 = y_2$?

Question 2 Supposez maintenant l'économie est ouverte, c'est à dire que l'agent représentatif a la capacité de s'adresser au “reste du monde” pour emprunter ou prêter. Déterminez la fonction d'épargne de l'agent représentatif. Sous quelle condition l'agent est-il emprunteur en première période ?

7.3 Incertitude et épargne de précaution

Soit une économie à deux périodes ($t = 1, 2$) dont l'agent représentatif a la fonction d'utilité suivante :

$$E\left[U\left(c_1; c_2\right)\right] = u\left(c_1\right) + \beta E\left[u\left(c_2\right)\right]$$

L'agent reçoit en période 1 un revenu y_1. Son revenu en période 2 est incertain :

$$y_2 = \bar{y} + \varepsilon$$

où ε est une variable aléatoire de variance σ_ε^2 et d'espérance nulle. L'agent représentatif a accès au marché du crédit.

Question 1 Supposons que la fonction $u\left(.\right)$ est de forme quadratique :

$$u\left(c\right) = c - ac^2$$

Montrez que l'aversion absolue au risque s'accroît avec la consommation / la richesse.

Question 2 Écrivez l'équation d'Euler correspondant au programme de l'agent représentatif.

Question 3 Montrez qu'une hausse de l'incertitude (représentée par un accroissement de σ_ε^2) n'a pas d'influence sur les comportements de consommation et d'épargne. Commentez.

Question 4 En vous replaçant dans le cas général, montrez que pour que l'aversion absolue au risque soit décroissante, $u'''\left(.\right)$ doit être positive. On dit que de telles fonctions d'utilité reflètent un comportement prudent.

Question 5 Supposons maintenant que $u'''\left(.\right) > 0$. Montrez qu'un accroissement de l'incertitude pesant sur le revenu implique une hausse de l'épargne (vous pouvez utiliser l'inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe et X une variable aléatoire réelle, alors $E\left[f\left(X\right)\right] \geq f\left(E\left[X\right]\right)$).

7.4 Epargne et durée de vie incertaine (partiel 2009-2010)

On s'intéresse tout d'abord à la consommation et à l'épargne d'un agent au cours de sa vie. L'agent vit deux périodes. Sa consommation durant sa jeunesse est c_0, ses dotations sont y_0. Au cours de sa vieillesse, sa consommation est c_1 et ses dotations y_1. Les préférences de l'agent peuvent être représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U\left(c_0, c_1\right) = ln\left(c_0\right) + \delta ln\left(c_1\right) \text{ avec } \delta \in \left]0, 1\right[$$

Question 1 Comment peut-on interprèter le paramètre δ ?

Question 2 En supposant que l'agent a accès au marché des fonds prêtables au taux r, écrivez la contrainte budgétaire de cet agent.

Question 3 Ecrivez le Lagrangien du programme de l'agent. Donnez en les conditions du premier ordre.

Question 4 Donnez les fonctions de demande pour les deux périodes en fonction des paramètres du modèle : $c_0(y_0, y_1, r)$ et $c_1(y_0, y_1, r)$. Exprimez la fonction d'épargne $s(y_0, y_1, r)$. A quelle condition l'épargne est-elle positive ?

Question 5 Etudiez les propensions marginales à consommer et à épargner.

Question 6 Quel est l'effet du taux d'intérêt sur la consommation ?

Question 7 Supposons que les agents travaillent quand ils sont jeunes et reçoivent alors un salaire w_0 duquel une cotisation α est prélevée pour leur retraite. Il s'agit d'un système par répartition. Lorsqu'ils sont vieux, les agents ne travaillent pas. Il reçoivent alors une pension dont le montant est égal à ce qu'ils ont cotisé multiplié par $(1+n)$ qui représente le rapport entre le nombre de jeunes et le nombre de vieux. Ecrivez la fonction d'épargne d'un agent en fonction des paramètres du modèle et commentez-la.

Question 8 Nous allons maintenant supposer que l'économie est composée de deux types d'agents.

Les agents de type 1 ne vivent qu'une période et leur fonction d'utilité est :

$$V_1(c_0) = ln(c_0)$$

Les agents de type 2 vivent deux périodes et leure fonction d'utilité est :

$$V_2(c_0, c_1) = ln(c_0) + ln(c_1)$$

Au moment où ils décident de leur éparge, les agents ne connaissent pas leur type, leur durée de vie est donc incertaine. Ils pensent qu'ils ont une probabilité p d'être de type 2 et $(1-p)$ d'être de type 1.

En supposant que les agents maximisent leur espérance d'utilité, écrivez le programme d'optimisation d'un agent. Comparez-le avec le programme précédent. Comment peut-on alors interprèter le paramètre δ ?

Question 9 On suppose que la probabilité moyenne de survie dans la population est $\bar{p}$. Que devient le rapport entre le nombre de jeunes et le nombre de vieux ? Comment varie l'épargne avec la probabilité de survie ? A quelle condition les agents ont-ils une épargne positive ?

7.5 Investissement

Soit une économie composée de deux individus, A et B, et d'une entreprise. Il existe deux biens, x et y. Le premier correspond à la richesse aujourd'hui et le second à la richesse demain. La firme utilise x pour produire y grâce à la technologie suivante :

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

Chaque individu possède la moitié de la firme et a comme dotation initiale $(x; y) = (1; 1)$. Les préférences des individus sont représentées par les fonctions d'utilité $U^A = a * ln(x) + (1 - a) * ln(y)$ et $U^B = b * ln(x) + (1 - b) * ln(y)$, avec $(a; b) \in]0; 1[^2$.

Question 1 Supposons que la firme emprunte $k/2$ unités de bien d'aujourd'hui à chaque individu pour produire $f(k)$ unités de bien de demain et donne à chacun la moitié de la production. Quelle sera le plan de production adopté si la décision est prise par A seul ? Par B seul ?

Question 2 Supposons maintenant qu'il existe une banque. Il est possible d'emprunter ou de placer au même taux d'intérêt r. Expliquez pourquoi les décisions concernant la consommation et la production sont prises séparément. Quelle est la décision de la firme ? Quel est le taux d'intérêt d'équilibre ?

7.6 Production dans l'incertain

Soit une économie composée de deux individus $(i = A, B)$, un bien (x) et deux périodes $(t = 0, 1)$. Les décisions sont prises dans l'incertain en $t = 0$ et toute l'incertitude disparaît en $t = 1$. Deux états de la nature $(s = s_1, s_2)$ peuvent survenir en $t = 1$.

La relation de préférence de l'individu A est représentée par la fonction d'utilité suivante :

$$U^A = ln(x_0) + E[ln(x_1(s))]$$

avec $x_0 > 0$ la consommation en $t = 0$ et $x_1(s) > 0$ la consommation en $t = 1$ dans l'état s. De façon similaire, les préférences de l'individu B sont représentées par :

$$U^B = ln(x_0) + \frac{1}{2}E[ln(x_1(s))]$$

Les anticipations sont définies par rapport à la probabilité d'occurrence des états de la nature $\pi = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$. Les dotations initiales $e^i(z_0; z_1(s_1); z_1(s_2))$de l'individu i sont certaines en $t = 0$ mais dépendent de l'état de la nature en $t = 1$:

$$e^A = (1;0;0) \quad et \quad e^B = (0;2;1)$$

L'individu A est propriétaire de la firme. Celle-ci utilise y_0 en $t = 0$ pour produire $y_1(s)$ en $t = 1$ à l'aide de la technologie suivante :

$$y_1(s_1) = y_1(s_2) = \sqrt{y_0}$$

Enfin, on suppose qu'il existe un marché complet pour l'ensemble des biens contingents (en d'autres termes, il existe un prix pour chaque bien dans chaque état de la nature et ce prix intègre la probabilité d'occurrence de l'état correspondant).

Question Déterminez l'équilibre concurrentiel de cette économie.

7.7 Consommation en temps continu (partiel 2008-2009)

On se propose d'étudier le modèle de consommation suivant :

$$\begin{aligned} max_{c_t} & \quad \int_0^T ln(c_t)\, e^{-\theta t} dt & \\ sc & \quad \dot{a} = w_t + ra_t - c_t & \forall t \in [0;T] \\ avec & \quad a_0 = cst \geq 0 \quad et \quad a_T = 0 & \end{aligned}$$

Question 1 Donnez l'interprétation économique de ce programme. Quelle est la variable de contrôle de ce modèle ? Quelle est la variable d'état ?

Question 2 Calculez les coefficient de résistance à la substitution intertemporelle de cet agent.

Question 3 Écrivez le Hamiltonien de ce programme. Exprimez les conditions nécessaires d'optimalité.

Question 4 Exprimez le taux de croissance de la consommation en fonction du temps. Déduisez-en l'expression de la consommation en fonction du temps.

Question 5 Supposons que ce modèle représente correctement la décision de deux agents qui ont les mêmes préférences, mais dont les ensembles budgétaires sont différents.
Pour l'agent 1 : $a_0 = a_0^1 > 0$ et $\forall t \in [0; T]\,, \quad w_t = 0$.
Pour l'agent 2 : $a_0 = 0$ et $\forall t \in [0; T]\,, \quad w_t = w > 0$.
On suppose que l'on se trouve dans une économie de finance intermèdiée : toutes les opérations de crédit et d'emprunt des agents passent par les banques. Le taux de croissance de la consommation va-t-il différer entre les deux agents ? A quelle condition simple vont-ils avoir la même consommation à chaque instant ?

Question 6 Suite à la crise du système bancaire, les banques refusent désormais de prêter aux particuliers qui ne peuvent donc plus s'endetter. En revanche les particuliers restent libre de prêter aux banques au taux r. Pour quel niveau du taux d'intérêt l'effondrement du crédit aux particuliers va-t-il affecter l'agent 2 ? Quelle sera la valeur de sa fonction de consommation dans ce cas ? Mêmes questions pour l'agent 1.

7.8 Choix intertemporel généralisé (partiel 2009-2010)

On se propose maintenant d'étudier le modèle de choix intertemporel généralisé suivant :

$$\begin{aligned} &\max_{c_t} \int_0^T v(c_t, t)dt \\ &\quad \text{sc} \dot{a} = w_t + ra_t - c_t, \quad \forall t \in [0, T] \\ &\text{avec} a_0 = cst \geq 0 \text{ et } a_T = 0 \end{aligned}$$

v est une fonction à deux variables que l'on suppose croissante et concave en c.

On notera $v_1^{'}(c_t, t)$,la dérivée de v par rapport à sa première variable et $v_2^{'}(c_t, t)$, la dérivée de v par rapport à sa seconde variable. Selon le même principe, on notera $v_{11}^{''}(c_t, t)$, $v_{22}^{''}(c_t, t)$, $v_{12}^{''}(c_t, t)$, les dérivées secondes pures et croisées.

Question 1 Ecrivez l'Hamiltonien de ce programme et donnez-en les conditions d'optimalité.

Question 2 Exprimez le taux de croissance de la consommation en fonction du temps. Faire apparaître $\Theta(c_t, t) = -\frac{v_{12}^{''}(c_t,t)}{v_1^{'}(c_t,t)}$, le taux de préférence pour le présent généralisé.

8 Modèles macroéconomiques

8.1 Modèle AS-AD (partiel 2001-2002)

On se propose de décrire le fonctionnement d'une économie par le modèle suivant :

Bloc offre (AS) :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = F(N) \\ \frac{w}{p} = F'(N) \end{array} \right.$$

avec $F(0) = 0$, $F'(N) \geq 0$ et $F''(N) \leq 0$.

Bloc demande (AD) :

$$\left\{ \begin{array}{r} Y = C(Y - T) + I(i; e) + G \\ \frac{M}{p} = L(Y; i) \end{array} \right.$$

avec $C' \in]0; 1[$, $I'_i < 0$, $I'_e > 0$, $L'_Y > 0$ et $L'_i < 0$. Ici e représente l'efficacité du capital.

Question 1 Pour une politique économique donnée, calculez les pentes des courbes AS et AD et représentez-les.

Question 2 Décrivez dans le repère $(O; Y; p)$ l'effet d'une politique budgétaire.

Question 3 Calculez le multiplicateur de dépense publique financée par emprunt lorsque w et e sont constants.

Question 4 Supposez maintenant que le gouvernement peut fixer le salaire nominal. Ce-dernier devient donc une variable de politique économique. Représentez graphiquement l'effet d'une baisse du salaire nominal.

Question 5 Calculez dY/dw. Une baisse du salaire nominal permet-elle de réduire le chômage ?

Question 6 On suppose maintenant que e est une fonction de w, avec $e'(w) > 0$. Donnez une justification économique à une telle hypothèse. Représentez l'effet d'une baisse du salaire nominal.

Question 7 Exprimez dY/dw. A quelle condition cette valeur est-elle positive ?

8.2 Courbe de Phillips

La courbe de Phillips est une relation décroissante entre inflation et taux de chômage. On se propose ici de construire une courbe de Phillips à partir d'un d'équilibre partiel sur le marché du travail.

Les salaires W_t de la période t sont déterminés en début de période par négociation collective de la façon suivante :

$$W_t = P_t F(u_t; z)$$

où P_t représente le niveau des prix de la période t et $F(u_t; z)$ le pouvoir de négociation des salariés. u_t est le taux de chômage à la date t et z un paramètre qui influence positivement le pouvoir de négociation des salariés. On suppose $F'_{u_t} < 0$ et $F'_z > 0$. On appelle l'expression précédente WS.

Les entreprises fixent P_t, le prix de vente de la production, en appliquant un taux de marge $\mu > 0$ aux coûts salariaux :

$$P_t = W_t (1 + \mu)$$

On appelle cette expression PS.

Question 1 Justifiez l'hypothèse $F'_{u_t} < 0$. Que représente le paramètre z ?

Question 2 Déterminez le salaire réel et le taux de chômage d'équilibre et représentez-les graphiquement. Que se passe-t-il si z s'accroît ? Commentez.

Question 3 Les salaires sont en fait négociés en début de période. Les salariés s'intéresse donc aux prix anticipés en début de période pour la période t. Ce niveau des prix est noté P_t^e et la relation WS devient donc :

$$W_t = P_t^e F(u_t; z)$$

On suppose $F(u_t; z) == 1 - \alpha u_t + z$ avec $\alpha > 0$. Montrez que la courbe de Phillips s'écrit :

$$\pi_t = \pi_t^e + \mu + z - \alpha u_t$$

où π_t est l'inflation en période t et π_t^e l'inflation anticipée.

Question 4 Supposons que les travailleurs anticipent une inflation nulle et que le gouvernement peut contrôler l'inflation (via une demande supérieure à l'offre par exemple). Quelle est la marge de manoeuvre du gouvernement ?

Question 5 Supposons que les travailleurs anticipent que l'inflation sera la même que l'année précédente. Quelle est l'efficacité de la politique du gouvernement ?

Question 6 Enfin, supposons que les travailleurs anticipent parfaitement l'inflation. Quelle est l'efficacité de la politique du gouvernement ?

8.3 Crédibilité de la politique monétaire (partiel 2009-2010)

Soit une économie dont le fonctionnement est caractérisé par la fonction suivante :

$$y = \overline{y} + \alpha(\pi - \pi^a)$$

avec y, le revenu national, $\overline{y}$, le revenu national d'équilibre, π, le taux d'inflation, π^a, le taux d'inflation anticipé par les agents, $\alpha > 0$, la sensibilité du revenu à l'inflation non-anticipée.

Le gouvernement peut agir sur l'économie en choisissant le niveau d'inflation. On suppose qu'il cherche à minimiser la fonction de perte suivante :

$$L = \beta\pi^2 + \gamma(k\overline{y} - y)^2$$

avec L, la perte du gouvernement, β, l'aversion du gouvernement à l'inflation, γ, l'aversion du gouvernement pour le sous-emploi, $k > 1$, une variable représentant le revenu national désiré.

Question 1 Comment peut-on justifier théoriquement l'équation $y = \overline{y} + \alpha(\pi - \pi^a)$?

Question 2 Quel est, connaissant π^a, le taux d'inflation choisit par le gouvernement ?

Question 3 On appelle équilibre discrétionnaire la situation dans laquelle les agents anticipent correctement l'inflation choisie par le gouvernement ($\pi^a = \pi$). Calculez y^D, π^D, et L^D, respectivement le revenu national, l'inflation, et la perte d'équilibre dans cette situation.

Question 4 On appelle équilibre avec pré-engagement la situation dans laquelle le gouvernement fixe une inflation nulle et les agents anticipent une inflation nulle. Calculez y^P et L^P.

Question 5 On appelle équilibre de trahison la situation dans laquelle le gouvernement annonce une inflation nulle, mais ne tient pas sa promesse alors que les agents y croient ($\pi^a = 0$). Calculez π^T, et L^T.

Question 6 Classez L^D, L^P et L^T. En quoi ce classement pose-t-il le problème de la crédibilité de la politique économique ? Pour quelle valeur de γ le problème ne se pose-t-il pas ? Interprétez.

8.4 Economie ouverte (contrôle continu 2009-2010)

Soit un modèle composé de deux pays (A et B) et de deux périodes (1 et 2). La fonction d'utilité du pays i est

$$U_i\left(.\right) = ln\, C_1^i + \beta^i ln\, C_2^i.$$

Les revenus du pays i en période 1 et 2 sont y_1^i et y_2^i. Il existe entre les deux pays un marché financier dont le taux d'intérêt est r.

Question 1 Exprimez la contrainte budgétaire intertemporelle du pays i puis montrez que sa consommation en période 1 est

$$C_1^i = \frac{1}{1+\beta^i}\left(y_1^i + \frac{y_2^i}{1+r}\right)$$

Question 2 Exprimez les montants épargnés $S_A\left(r\right)$ et $S_B\left(r\right)$ par les deux pays.

Question 3 Déterminez le taux d'intérêt d'équilibre r^* entre les deux pays. Commentez.

Question 4 Montrez que r^* est compris entre les taux d'intérêt d'autarcie des deux pays (le taux d'intérêt d'autarcie du pays i est r_i tel que $S_i\left(r_i\right) = 0$). Commentez.

Question 5 Dans ce modèle très simple sans investissement ni commerce international, le compte courant d'un pays est égal à son épargne globale. Vérifiez qu'un pays dont le taux d'intérêt d'autarcie est inférieur (supérieur) au taux d'intérêt international a un compte courant excédentaire (déficitaire) en période 1.

Question 6 Montrez que

$$\frac{dU_i\left(.\right)}{dr} = \frac{\partial U_i\left(.\right)}{\partial C_2^i}\left(y_1^i - C_1^i\right).$$

Commentez.

Question 7 Comment une hausse du taux de croissance d'un pays affecte-t-il le bien-être de l'autre pays ?

8.5 Modèle IS-LM (contrôle continu 2009-2010)

On se place dans un cadre IS-LM modifié. Supposons que la fonction de consommation de l'économie dépende du revenu Y et des encaisses réelles $\frac{M}{p}$, $C = C(Y, \frac{M}{p})$.

Question 1 Quel est selon vous le signe de $\frac{\partial C}{\partial(M/p)}$? Justifiez.

Question 2 Les courbes IS et LM sont données par

$$Y = C(Y, \frac{M}{p}) + I(i) + G$$

et

$$\frac{M}{p} = L(Y, i)$$

où $I(.)$ est l'investissement, i le taux d'intérêt, G les dépenses publiques, $L(.)$ la demande de monnaie.

Donnez le signe des dérivées partielles de I et L. Dans le modèle IS-LM **standard**, quelles sont les variables endogènes ?

Question 3 Dans la suite de l'exercice, on normalise le prix p à 1. Le gouvernement a le choix entre deux types de politique économique : une règle de fixation de la masse monétaire (M exogène) ou une règle de fixation du taux d'intérêt (i exogène).

Supposons que le gouvernement opte pour une règle de fixation de la masse monétaire. Représentez IS et LM dans un plan (i, Y). Calculez l'effet sur le revenu

- d'une hausse de la masse monétaire,
- d'une hausse des dépenses publiques.

Question 4 Supposons que le gouvernement choisisse une règle de fixation du taux d'intérêt. On suppose que $1 - C'_Y - C'_M L'_Y > 0$. Dans un plan (M, Y) représentez les courbes IS et LM (en justifiant le signe de leur pente). Calculez l'effet sur le revenu

- d'une baisse du taux d'intérêt,
- d'une augmentation des dépenses publiques.

Question 5 La politique budgétaire est-elle plus efficace lorsque l'on fixe le taux d'intérêt ou la masse monétaire ? Pourquoi ?