Fondements de l'Analyse Économique
Travaux Dirigés 2009-2010
Interrogation écrite N°1
Corrigé

Alexandre de Cornière & Marc Sangnier

18 novembre 2009

Exercice 1 (4 points)

Résoudre le programme suivant selon les valeurs de R :

$$\begin{cases} max_{\{x,y\}} & \sqrt{x}+y \\ sc & x+y \leq R \\ sc & \frac{1}{16} \leq x \\ sc & y \geq 0 \end{cases}$$

Le lagrangien est

$$L(.) = \sqrt{x} + y + \lambda(x - 1/16) + \mu y + \nu(R - x - y)$$

La contrainte "budgétaire" est nécessairement saturée. Par ailleurs, $R < \frac{1}{16}$ est impossible, les contraintes ne pouvant être satisfaites dans cette situation.

- *Cas d'une solution intérieure $x > 1/16$ et $y > 0$.*
  On a nécessairement, d'après Kuhn et Tucker, $\lambda = \mu = 0$. En annulant les dérivées partielles du lagrangien par rapport à x et y, on obtient $\nu = 1/(2\sqrt{x})$ et $\nu = 1$, d'où $x = 1/4$.
  Comme la contrainte "budégétaire" est saturée, on a aussi $y = R - 1/4$, ce qui est possible ***uniquement si*** *$R > 1/4$.*
- *Solution en coin telle que $x = 1/16$.*
  Les conditions de Kuhn et Tucker en dérivant $L(.)$ par rapport à x et y si $x = 1/16$ donnent $\nu = 1$ et $\lambda = -1$. Or une valeur négative d'un multiplicateur est impossible. Il n'existe donc pas de telle solution intérieure.

- *Solution en coin telle que $y = 0$.*
  Cela veut dire que $x = R$ et donc $\lambda = 0$. La première condition de Kuhn et Tucker (par rapport à x) donne $1/(2\sqrt{x}) = \nu$, ce qui donne $\nu = 1/(2\sqrt{R})$. La deuxième condition de Kuhn et Tucker (par rapport à y) donne $\mu = 1/(2\sqrt{R}) - 1$. Or $\mu \geq 0$ donc $R \leq 1/4$.

Au final, on a :

- *Lorsque $1/16 < R \leq 1/4$: $x = R$, $y = 0$.*
- *Lorsque $R > 1/4$: $x = 1/4$, $y = R - 1/4$.*

Exercice 2 (6 points)

Un examen comporte N questions. Le temps consacré à l'ensemble de l'examen par un élève est $0 \leq t$. Ce temps ne peut excéder T minutes, d'où $t \leq T$. Le temps consacré à la question i est t_i. D'où $\sum_{i=1}^{N} t_i = t$. Le score S_i obtenu à la question $i = 1, ..., N$ dépend de la façon dont l'élève traite cette question. Ce score a tendance à s'accroître, ou du moins à ne pas décroître, avec le temps consacré à la question i, mais dépend également de la masse de connaissance K apportée à l'examen. D'où $S_i = S_i\left(t_i; K\right)$ avec $\partial S_i / \partial t_i \geq 0$ et $\partial S_i / \partial K > 0$. La note note finale G dépend du score total, défini par la somme des scores obtenus à chaque question : $G = \sum_{i=1}^{N} S_i$.

Question 1 (1 point)

La fonction d'utilité $U\left(.\right)$ d'un élève peut s'écrire :

$$U\left(.\right) = \sum_{i=1}^{N} S_i\left(t_i; K\right) - vt$$

avec $v > 0$.

Commentez brièvement l'expression de cette fonction d'utilité. Quel est le programme de maximisation d'un élève ? Écrivez le Lagrangien correspondant.

La fonction d'utilité d'un étudiant est de forme linéaire. On peut supposer que v est la valeur que l'étudiant accorde à chaque unité de temps. Plus il passe de temps dans la salle d'examen, plus la désutilité liée à l'absence de temps libre s'accroît.

Le programme de maximisation correspondant est :

$$\begin{cases} max & U\left(.\right) \\ sc & 0 \leq t \\ sc & t \leq T \\ sc & \sum_{i=1}^{N} t_i = T \end{cases}$$

Le Lagrangien associé est :

$$L(.) = \sum_{i=1}^{N} S_i(t_i; K) - vt + \mu t + \eta (T - t)$$

Question 2 (2 points)

Que peut-on dire des productivités marginales des fonctions S_i à l'optimum dans le cas d'une solution intérieure ($t > 0$) ?

En supposant $t > 0$, ce qui implique $\mu = 0$, pour tout i, on a :

$$\frac{\partial S_i(t_i; K)}{\partial t_i} - v - \eta = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial S_i(t_i; K)}{\partial t_i} = v + \eta$$

D'où, pour tout $i \neq j$:

$$\frac{\partial S_i(t_i; K)}{\partial t_i} = \frac{\partial S_j(t_j; K)}{\partial t_j}$$

L'étudiant va donc choisir l'ensemble des t_i de façon à ce que les productivités marginales de toutes les fonctions S_i soient égales.

Question 3 (3 points)

Supposons que toutes les fonctions S_i sont de la forme $S_i = t_i^{\alpha} K$ avec $\alpha > 0$. A quelle(s) condition(s) un élève quitte-t-il l'examen avant l'heure limite ?
Indication : trouvez l'expression générale de la fonction d'utilité et discutez par la suite selon les valeurs de α.
Dans le cas où $\alpha = 1$, vous répondrez à la question suivante : les "cancres" et les "têtes" (caractérisés respectivement par $K = K^-$ et $K = K^+$, avec $K^- < K^+$) quittent-ils la salle en avance ?

La condition précédente s'écrit :

$$\alpha t_i^{\alpha-1} K = \alpha t_j^{\alpha-1} K$$

D'où pour tout $i \neq j$:

$$t_i = t_j = \tilde{t}$$

On peut donc en déduire :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} t_i = t &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \tilde{t} = t \\ &\Longleftrightarrow N\tilde{t} = t \\ &\Longleftrightarrow \tilde{t} = \frac{t}{N}\end{aligned}$$

Le fonction d'utilité peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}U(.) &= \sum_{i=1}^{N} S_i - vt \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{t}{N}\right)^{\alpha} K - vt \\ &= t^{\alpha} N^{\alpha-1} K - vt\end{aligned}$$

On va maintenant distinguer trois cas, selon les valeurs de α :

- *Si $\alpha = 1$,*
  Alors la fonction d'utilité peut s'écrire $U(.) = (K - v)\,t$, c'est à dire sous forme linéaire. Donc $\partial U(.)/\partial t = (K - v)$.
  - Si $v \leq K^-$, tous les étudiants restent jusqu'à la fin de l'examen.
  - Si $K^+ \leq v$, tous les étudiants partent dès le début de l'examen.
  - Si $K^- < v < K^+$, les "cancres" partent dès le début de l'examen et les "têtes" restent jusqu'à la fin.
- *Si $\alpha < 1$,*
  Alors la fonction $U(.)$ est concave , en effet :

  $$\frac{\partial^2 U(.)}{\partial^2 t} = \alpha(\alpha - 1) N^{\alpha-1} t^{\alpha-2} K < 0$$

  L'utilité marginale est donc décroissante. L'étudiant va donc rester jusqu'à la minute t^* où $\partial U(t^*, K)/\partial t = 0$, c'est à dire $\partial G(t^*, K)/\partial t = v$ car $U(.) = G(.) - vt$. Si il reste une minute de plus, la perte d'utilité induite est plus importante que le gain d'utilité amener par l'accroissement de la note. Il n'est donc pas optimal de rester plus longtemps ou moins longtemps que le temps t^*.
  Si $\partial G(0, K)/\partial t < v$, l'étudiant part à $t = 0$. Si $\partial G(T, K)/\partial t > v$, l'étudiant reste jusqu'à la fin.
- *Si $\alpha > 1$,*
  Alors la fonction $U(.)$ est convexe.
  L'utilité marginale est donc croissante. La condition d'optimalité est la même que précédemment. Mais l'étudiant arrête à $t = 0$ si $\partial G(T, K)/\partial t < v$.

Exercice 3 (4 points)

En vous plaçant dans un cadre d'analyse classique supposant l'absence de chômage subi (ou involontaire), en faisant l'hypothèse que les travailleurs prennent davantage les transports publics que les personnes inactives et que le temps de loisir est un bien normal, répondez rapidement aux questions suivantes :

– Le "subventionnement" du transport public affecte-t-il l'offre de travail ?

Si les transports publics sont subventionnés, cela réduit le coût du transport (soit par la réduction de son prix, soit par l'accroissement des fréquences par exemple) et donc le coût de ne pas rester inactif. Il s'agit d'un effet de substitution qui pousse à accroître l'offre de travail. Mais il existe également un effet revenu : si le loisir est un bien normal, sa demande va s'accroître car son coût d'opportunité va décroître. L'offre de travail a alors tendance à baisser. L'effet de la subvention du transport public sur l'offre de travail est donc ambigu.

– Les travailleurs à faible productivité sont-ils davantage touchés que les autres par cette mesure ?

Les travailleurs dont la productivité est faible reçoivent des salaires plus faibles et sont probablement plus concernés par la problématique des transports publics. L'effet de substitution sera donc plus important que pour des travailleurs à productivité élevée. Mais comme le coût des transports représente également une part plus importante de leur budget, l'effet revenu sera également plus important. On ne peut donc dire si l'offre de travail des travailleurs à faible productivité sera plus affectée ou non que celle des travailleurs à forte productivité.

Exercice 4 (4 points)

Une entreprise possède deux usines ayant chacune des technologies Cobb-Douglas à rendements constants (mais non-nécessairement identiques). Écrire le programme permettant de calculer la fonction de coût de cette entreprise, et décrire brièvement la façon dont on peut le résoudre.
Attention : ne pas faire tous les calculs.

On se restreint ici au cas où chaque usine emploi deux facteurs de production, le travail L et le capital K.

Soit L_i la quantité de travail utilisée dans l'usine i. Soit K_i la quantité de capital utilisée dans l'usine i. Soit w le coût du travail, soit r le coût du capital.

Soit $F_1(K_1, L_1)$ la fonction de production de l'usine 1 :

$$F_1(K_1, L_1) = K_1^{\alpha} L_1^{1-\alpha}$$

Soit $F_2(K_2, L_2)$ la fonction de production de l'usine 2 :

$$F_2(K_2, L_2) = K_2^{\beta} L_2^{1-\beta}$$

Le programme permettant de calculer la fonction de coût de l'entreprise est :

$$\begin{cases} min_{K_1,L_1,K_2,L_2} & w(L_1 + L_2) + r(K_1 + K_2) \\ sc & K_1^{\alpha} L_1^{1-\alpha} + K_2^{\beta} L_2^{1-\beta} \geq q \end{cases}$$

Après résolution, on détermine $\hat{K_1}$, $\hat{K_2}$, $\hat{L_1}$, $\hat{L_2}$ solutions de ce programme exprimées en fonction de q. La fonction de coût de l'entreprise est alors :

$$C(q) = r\left[\hat{K_1}(q) + \hat{K_2}(q)\right] + w\left[\hat{L_1}(q) + \hat{L_2}(q)\right]$$

Exercice 5 (4 points)

Rappelez la définition d'un bien inférieur et d'un bien normal.
Le graphique ci-joint représente les demandes marshalienne $x_l(p, \bar{w})$ et hicksienne $h_l(p, v(\bar{p}, \bar{w}))$ pour deux biens $l = a, b$. Pour chacun de ces biens, déterminez s'il est normal ou inférieur. Justifiez vos réponses.

Un bien inférieur (normal) est un bien dont la consommation décroît (croît) avec le revenu.
L'équation de Slutsky peut s'écrire :

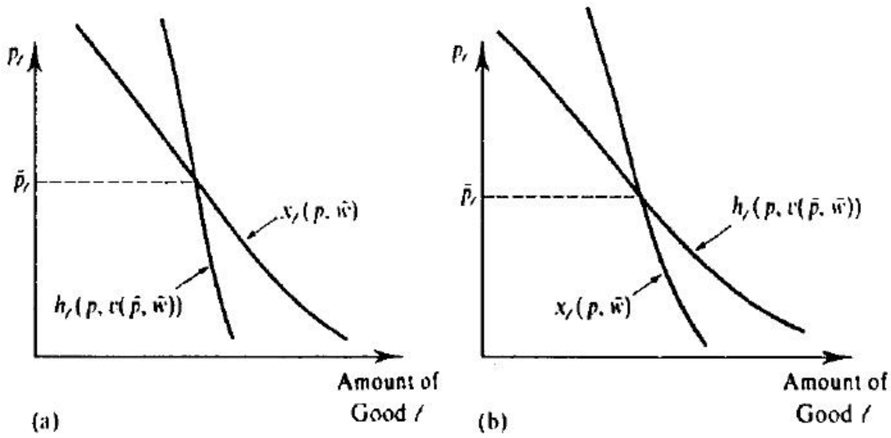
$$\frac{\partial h(.)}{\partial p} = \frac{\partial x(.)}{\partial p} + \frac{\partial x(.)}{\partial w} x(.)$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial x(.)}{\partial w} x(.) = \frac{\partial h(.)}{\partial p} - \frac{\partial x(.)}{\partial p}$$

Dans la mesure où $x(.) > 0$, on peut en déduire :

$$sign\left[\frac{\partial x(.)}{\partial w}\right] = sign\left[\frac{\partial h(.)}{\partial p} - \frac{\partial x(.)}{\partial p}\right]$$



Graphique pour l'exercice 5.

Il est clair que dans le cas du bien a, la pente de la demande hicksienne est supérieure à celle de la demande marshalienne, on en déuit donc $\frac{\partial h(.)}{\partial p} - \frac{\partial x(.)}{\partial p} > 0$*, d'où* $\frac{\partial x(.)}{\partial w} > 0$*. Le bien a est donc un bien normal.*

En faisant le même raisonnement, on montre que $\frac{\partial x(.)}{\partial w} < 0$*. Le bien b est donc un bien inférieur.*