Fondements de l'Analyse Économique
Travaux Dirigés 2008-2009

Alexandre de Cornière & Marc Sangnier

Septembre 2008

École Normale Supérieure de Cachan - Département Économie Gestion

Table des matières

1 Représentation des préférences

1.1 Rationalité

Une relation de préférence $\succeq$ est dite rationnelle si et seulement si elle est complète et transitive.

Proposition :
Si $\succeq$ est rationnelle, alors :
(1) $\succ$ est à la fois transitive et non-réflexive ;
(2) $\sim$ est réflexive, transitive et symétrique ;
(3) si $x \succ y \succeq z$, alors $x \succ z$.

1. Démontrez la propriété (3).
2. Démontrez les propriétés (1) et (2).

1.2 Fonction d'utilité à élasticité constante

On appelle fonctions CES (Constant Elasticity of Substitution) une fonction d'utilité $u(x_1; x_2)$ de la forme suivante :

$$u(x_1; x_2) = [\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho]^{1/\rho}$$

1. Expliquez pourquoi on dit qu'une fonction de cette forme est à élasticité de substitution constante.
2. Montrez que si $\rho = 1$, alors les courbes d'indifférences associées à cette fonction sont linéraires.
3. Montrez que si $\rho \to 0$, alors cette fonction représente les même préférences que la fonction Cobb-Douglas $v(x_1; x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$.
4. Montrez que si $\rho \to -\infty$, alors les courbes d'indifférences associées à cette fonction sont "à angle droit", c'est à dire que cette fonction tend à présenter la même carte d'indifférence que la fonction de Leontieff $w(x_1; x_2) = min\{x_1; x_2\}$.

2 Théorie de la demande

2.1 Les préférences révélées

Vous disposez des informations suivantes sur les achats d'un individu qui ne consomme que deux biens différents :

	Année 1		*Année 2*	
	Quantité	**Prix**	**Quantité**	**Prix**
Bien 1	100	100	120	100
Bien 2	100	100	y	80

Définition :

La fonction de demande walrasienne $x(p;w)$ satisfait l'axiome faible des préférences révélées si la propriété suivante est vérifiée pour tout couple prix-revenu $(p;w)$ et $(p';w')$:

Si $p * x(p';w') \leq w$ et $x(p';w') \neq x(p;w)$, alors $p' * x(p;w) > w'$.

Pour quelles quantités de bien 2 consommé pendant l'année 2 conclurez-vous que :

1. Que son comportement est en contradiction avec l'axiome faible des préférences révélées ?
2. Que le panier consommé l'année 1 est révélé préféré à celui consommé l'année 2 ?
3. Que le panier consommé l'année 2 est révélé préféré à celui consommé l'année 1 ?
4. Qu'il y a insuffisamment d'informations pour justifier 1, 2 et/ou 3 ?

2.2 Maximisation d'une fonction d'utilité

Un individu dont la richesse est w consomme deux biens en quantités x_1 et x_2. Le prix du bien 1 est p_1, celui du bien 2 est p_2. Les préférences de cet agent sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1;x_2) = (x_1+\alpha)(x_1+x_2) \qquad \textit{avec} \quad \alpha > 0$$

1. Représentez la carte d'indifférence de ce consommateur.
2. Écrivez le programme de ce consommateur et résolvez-le.
3. Représentez et étudiez la courbe d'Engel pour les deux biens.

2.3 Fonction d'utilité Stone-Geary (partiel 2007-2008)

Les préférences d'un individu sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1;x_2) = (x_1+1)^{\alpha}(x_2+1)^{\alpha}$$

avec $\alpha > 0$.

1. Calculez le taux marginal de substitution associé à cette fonction d'utilité. Donnez sa valeur numérique au point $(0;1)$.
2. Soient R le revenu de l'individu, p_1 et p_2 les prix des biens. On suppose $R = 1$, $p_1 = 3$ et $p_2 = 1$. Donnez sans aucun calcul le panier de bien qui sera choisi par l'individu dans cette situation.

3. On traite maintenant le cas général :

$$U\left(x_1; x_2\right) = \left(x_1 + \gamma_1\right)^{\alpha}\left(x_2 + \gamma_2\right)^{\beta}$$

avec γ_1 et γ_2 des constantes positives. Écrivez le programme de l'individu. Écrivez le Lagrangien généralisé ainsi que les conditions du premier ordre. Donnez l'expression complète de la fonction des fonctions de demande.

2.4 La dualité

Soit un agent qui consomme L biens différents en quantités x_l, avec $l = 1, ..., L$. Son ensemble de consommation est $X = \prod_{l=1}^{L} [a_l; +\infty[$ avec $\forall l, \quad a_l > 0$. Ses préférences sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U\left(x_1; ...; x_L\right) = k \prod_{l=1}^{L} \left(x_l - a_l\right)^{\alpha_l}$$

avec $k > 0$, $\forall l \quad, \alpha_l > 0$ et $\sum_{l=1}^{L} \alpha_l = 1$. Le vecteur des prix est $p = (p_1; ...; p_L)$.

1. Donnez une interprétation économique de "$\forall l, \quad a_l > 0$".
2. On suppose maintenant que la richesse du consommateur w est telle que $w > \sum_{l=1}^{L} p_l a_l$. Donnez la demande Marshalienne $x_l\left(p; w\right)$ pour chaque bien l. Vérifiez que ces demandes sont homogènes de degré 0 par rapport aux prix p et à la richesse w et que la loi de Walras est satisfaite.
3. Donnez la fonction d'utilité indirecte de ce consommateur.
4. Donnez la fonction de dépense $e\left(p; \bar{u}\right)$ de ce consommateur et sa fonction de demande Hicksienne $h_l\left(p; \bar{u}\right)$ pour chaque bien l.
5. On suppose maintenant que $L = 2$. La fonction de dépense du consommateur est donc :

   $$e\left(p; \bar{u}\right) = a_1 p_1 + a_2 p_2 + e^{\bar{u}} \delta^{-\delta} \left(1 - \delta\right)^{-(1-\delta)} p_1^{\delta} p_2^{1-\delta}$$

   avec $\delta = \alpha_1 / \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)$.
   Donnez la fonction d'utilité indirecte de ce consommateur.
6. Utilisez l'identité de Roy pour trouver les demandes Marshaliennes.
7. Donnez les fonctions de demande Hicksiennes. Vérifiez le lemme de Shepard.

3 Quelques raffinements de la théorie de la demande

3.1 Offre de travail des femmes mariées

On s'intéresse au choix des femmes mariées de travailler ou non. Cette décision dépend de plusieurs paramètres : le salaire de leur mari, le salaire qu'elle peuvent gagner en travaillant, ainsi que la valeur qu'elles accordent à leur temps de loisir.
En particulier, une femme décidera de travailler si le salaire horaire qu'on lui propose est supérieur à la valeur qu'elle accorde à une heure de loisir.

Partie 1

Considérons le modèle suivant. Madame Z a une utilité qui dépend de deux éléments : la quantité x de bien qu'elle consomme (chaque unité du bien est vendue au prix p) et le temps de loisir L dont elle dispose. Son utilité s'écrit

$$U(x, L) = \alpha ln(x) + (1 - \alpha) ln(L)$$

Son mari lui donne une somme R_0 indépendamment de sa décision de travailler. Elle dispose de T_0 heures, qu'elles peut répartir entre travail et loisir. Son salaire horaire si elle décide de travailler est w.

1. Écrire la contrainte de budget de Madame Z.
2. Calculer la demande Marshallienne de bien et celle de loisir. Déterminer son offre de travail, c'est-à-dire le nombre d'heures qu'elle souhaite travailler.
3. Montrer qu'il existe un salaire $\overline{w}$ en-dessous duquel Madame Z ne souhaite pas travailler. Ce salaire est appelé salaire de réservation. Comment le salaire de réservation varie-t-il avec α,p, R_0 et T_0 ?
4. Calculer l'utilité indirecte de Madame Z, notée $V(w, T_0, R_0)$.
5. La valeur que Madame Z accorde au temps est

   $$V' = \frac{\frac{\partial V(w,T_0,R_0)}{\partial T_0}}{\frac{\partial V(w,T_0,R_0)}{\partial R_0}}$$

   Interpréter V'. Montrer que $V' = max\{w, \overline{w}\}$.

Partie 2

On s'intéresse maintenant à l'arbitrage consommation-loisir pour des fonctions d'utilité $U(x, L)$ ayant les “bonnes" propriétés. La contrainte de budget est la même que pour la partie 1.

1. Comment varient x et L lorsque w varie ?
2. Montrer que si le bien de consommation est un bien normal, x augmente lorsque w augmente. Est-ce pareil pour L ? Interpréter dans les deux cas.

Partie 3

On suppose à présent que Madame Z a la possibilité d'effectuer du travail domestique et ainsi de produire elle-même le bien de consommation. Notons x_A la quantité de bien *achetée* et x_D la quantité de bien produite *domestiquement* par Madame Z. On a donc $x = x_A + x_D$.
Pour produire domestiquement le bien, Madame Z doit y consacrer du temps. On note h_D le nombre d'heures consacrées au travail domestique. La fonction de production domestique est $x_D = f(h_D)$, avec $f' > 0$ et $f'' < 0$.
On note désormais h_T le nombre d'heures travaillées à l'extérieur, et l'on a ainsi $T_0 = h_D + h_T + L$.

1. Écrire la contrainte budgétaire de Madame Z.
2. Écrire le programme de Madame Z, en précisant bien les variables de décision.
3. Montrer, à partir de la contrainte budgétaire, que le choix du nombre d'heures travaillées domestiquement h_D^* ne dépend que de f et de w. Que vaut h_D^* ? Commenter.

4 Théorie du producteur

4.1 Quelques fonctions de production

Soit un output produit à partir de deux inputs. On note z_1 et z_2 les quantités respectives d'inputs utilisées pour la production. On note w_1 et w_2 les prix respectifs d'une unité d'input 1 et 2. On note q la quantité d'output produit. Calculer la fonction de coût $c(w_1, w_2, q)$ ainsi que les fonctions de demande conditionnelle de facteurs $z_1(w_1, w_2, q)$ et $z_2(w_1, w_2, q)$ lorsque la fonction de production est donnée par :

1. $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ (inputs parfaitement substituables)
2. $f(z_1, z_2) = Min\{z_1, z_2\}$ (fonction de production Leontieff)
3. $f(z_1, z_2) = (z_1^\rho + z_2^\rho)^{1/\rho}$ (technologie CES)

4.2 Questions en vrac

1. Soient f et g deux fonctions de productions définies par

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = min\{ax_1, bx_2\} & \text{avec } a > 0 \text{ et } b > 0 \\ g(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} & \text{avec } \alpha \in]0; 1[\end{cases}$$

   Déterminez et tracez les ensembles de production ainsi que les isoquantes pour ces deux fonctions de production.

2. Montrez que la fonction $f(K,L) = K^2 + \sqrt{L}$ avec $K > 0$ et $L > 0$ ne représente ni une fonction de production à rendements constants, ni une fonction de production à rendements croissants, ni une fonction de production à rendements décroissants.
3. Supposons que la fonction de coût associée à une certaine technologie est différentiable. Montrez que le coût moyen augmente (resp. diminue) avec la quantité lorsque le coût marginal est supérieur (resp. inférieur) au coût moyen.

4.3 Fonction de production Stone-Geary (partiel 2006-2007)

Soit une entreprise dont la technologie de production est représentée par la fonction suivante :

$$y = f(x_1; x_2) = (x_1 + \gamma_1)^{\alpha} (x_2 + \gamma_2)^{\beta}$$

avec γ_1 et γ_2 des constantes positives.

1. Cette fonction de production est-elle homogène ?
2. Pour un couple $(x_1; x_2)$ donné, calculez l'élasticité du produit par rapport à chacun des facteurs de production. Comment varie cette élasticité quand la quantité du facteur varie de 0 à l'infini ?
3. Pour un couple $(x_1; x_2)$ donné, calculez l'élasticité de l'échelle de production. A quelle condition les rendements d'échelle locaux sont-ils décroissants en ce point ?
4. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que les rendements d'échelle soient toujours décroissants.

4.4 Fonctions de coût de court et long-terme

Soit une firme ayant une fonction de production égale à

$$y = (x_1^p + x_2^p)^{1/p}, p < 1$$

1. Quels sont les rendements d'échelle lorsque :
   – chaque facteur de production peut varier librement ?
   – l'input 2 est fixe ?

   Commenter.
2. A court terme la quantité d'input 2 est fixée à $x_2 = \overline{x}$. Déterminer la fonction de coût $C(w_1, w_2, y, \overline{x})$ où w_i représente le prix du facteur i. Commenter la relation entre coût et niveau de production.
3. A long terme la firme choisit librement ses niveaux d'inputs. Calculer la fonction de coût $C(w_1, w_2, y)$. Commenter la relation entre coût et niveau de production.

4. Pour chaque niveau de production y, montrer que le coût de production de long terme est celui qui correspond au minimum du coût de court terme par rapport à l'input fixe, c'est-à-dire

$$C(w_1, w_2, y) = \min_{\overline{x}}\{C(w_1, w_2, y, \overline{x})\}$$

Application numérique : $w_1 = w_2 = 1$, $p = 1/2$. Représenter graphiquement la situation. Commenter.

4.5 Durée du travail (partiel 2006-2007)

Partie 1

Une entreprise décide de sa politique d'embauche qui est définie par deux paramètres : N, le nombre de ses employés et T, le temps de travail de chacun de ses employés. Le temps de travail ne peut être supérieur à un maximum T_{max}. La fonction de production de la firme est :

$$F(N;T) = AN^{\alpha} f(T)^{\alpha}$$

avec $\alpha \in]0;1[$et $A > 0$. On suppose également que $f(0) = 0$, $f'(T) > 0$ et qu'il existe T_0 tel que $T < T_0 \Rightarrow f''(T) > 0$, $T = T_0 \Rightarrow f''(T) = 0$ et $T > T_0 \Rightarrow f''(T) < 0$. On admet que la fonction $f(.)$ admet une asymptote horizontale. Enfin, on considère que l'entreprise est relativement petite par rapport aux marchés des biens et du travail, elle prend donc le prix de vente de son produit, noté p, et le salaire horaire, noté w, comme donnés.

1. Donnez l'interprétation économique de chaque paramètre de la fonction de production. Représentez graphiquement l'allure générale de cette fonction. Donnez une interprétation économique du rapport $f(T)/T$. Pour quelle condition sur T ce rapport est-il maximal ? Donnez-en une interprétation sur le graphique précédent.
2. Écrivez la fonction de profit de l'entreprise et son programme de maximisation. Écrivez le Lagrangien généralisé correspondant.
3. En supposant qu'il existe une solution intérieure, écrivez les conditions du premier ordre du programme de maximisation du profit de l'entreprise et interprétez-les. Montrez que la durée de travail optimale du point de vue de l'entreprise, notée T_{opt}, de dépend pas du niveau d'emploi. Quelle relation simple caractérise T_{opt} ? Utilisez-la pour vérifier que T_{opt} est bien un maximum (condition du second ordre).
4. Supposez maintenant qu'il existe une durée légale maximale du travail, appelée T_{leg}, et que $T_{leg} < T_{opt}$. Écrivez le programme de maximisation du profit de l'entreprise. Écrivez le Lagrangien généralisé de ce problème. Donnez les conditions du premier ordre. Expliquez pourquoi la contrainte de durée est nécessairement saturée. Comment peut-on interpréter le multiplicateur de Kuhn et Tucker associé à cette contrainte ? Quel est l'effet de la mise en place de la durée légale du travail sur le profit de l'entreprise.

5. Exprimez N, la demande de travail de l'entreprise. Pour un salaire réel donné, comment varie la demande de travail de la firme quand la durée légale du travail diminue ?

Partie 2

On examine maintenant l'effet d'une réduction du temps de travail sur l'offre de travail. A cette fin, nous utilisons le modèle d'arbitrage travail-loisir.

Dans un premier temps, nous supposons que les agents ne subissent pas de contrainte autre que physiologique. Leur programme s'écrit alors :

$$\begin{cases} Max \quad U\left(C; T_{max} - T\right) \\ sc \quad R + wT - pC = 0 \quad et \quad T \geq 0 \end{cases}$$

où R représente les revenus non salariaux de l'agent. On suppose par ailleurs que la fonction $U\left(.\right)$ est croissante en chacun de ses arguments et strictement quasi-concave.

1. Écrivez le Lagrangien généralisé de ce programme. Écrivez-en les conditions de premier ordre.
2. Lorsque la contrainte de durée n'est pas saturée ($T > 0$), à quoi est égal le salaire réel ?
3. Étudions maintenant le cas où la contrainte de durée est saturée. A quoi est égal le salaire de réserve ? Comment varie-t-il en fonction de R ?

   Supposons maintenant que l'agent se voit imposer une durée de travail $\bar{T}$. Il a le choix entre travailler $\bar{T}$ et ne pas travailler du tout. Puisque son choix est discret, il suffit de comparer son utilité dans les deux situations pour connaître sa décision.

4. Quelle est l'utilité de l'agent qui travaille ? Quelle est l'utilité de l'agent qui ne travaille pas ? A quelle condition un agent décide-t-il de travailler ? Quelle est la condition que doit vérifier le salaire de réserve ? En différenciant cette condition, étudiez comment varie le salaire de réserve en fonction de R et de $\bar{T}$. En supposant le salaire invariant, quel peut-être l'effet d'une diminution de $\bar{T}$ sur l'offre de travail aggrégée ?

   Pour étudier l'effet du temps de travail sur le bien-être nous allons étudier le programme suivant :

$$\begin{cases} Max \quad U\left(C; T_{max} - T\right) \\ sc \quad R + wT - pC = 0 \quad et \quad T = \bar{T} \end{cases}$$

5. Écrivez le Lagrangien de ce programme. Comment peut-on interpréter le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de durée ? Quel est l'effet de la contrainte de durée sur le bien-être ?

6. En distinguant selon les cas où $\bar{T} = T_{opt}$ et $\bar{T} = T_{leg}$, discutez l'effet de la réduction du temps de travail sur le bien-être.

5 Théorie des prix : Introduction à la théorie de l'équilibre général en concurrence parfaite

5.1 Équilibre général Walrasien

Soit une économie composée de deux biens (1 et 2) et de deux consommateurs (A et B). Les préférences de ces deux individus sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U^A(x) = \frac{1}{3}ln(x_1) + \frac{2}{3}ln(x_2)$$

$$U^B(x) = \frac{3}{4}ln(x_1) + \frac{1}{4}ln(x_2)$$

Les dotations initiales des agents sont respectivement $e^A = (3; 9)$ et $e^B = (8; 12)$.

1. Déterminez l'ensemble des allocations optimales au sens de Pareto.
2. Déterminez l'équilibre walrasien de cette économie.
3. Vérifiez que cet équilibre est optimal au sens de Pareto.
4. Vérifiez que l'allocation $x_1 = \left(x_1^A; x_1^B\right) = (5,5; 18)$, $x_2 = \left(x_2^A; x_2^B\right) = (5,5; 3)$ est optimale au sens de Pareto. Déterminez les transferts nécessaires pour décentraliser cette allocation en un équilibre concurrentiel.
5. On ajoute à l'économie un producteur qui transforme le bien 1 en bien 2. Sa technologie de production est $y_2 = 4y_1$.
   Déterminez l'équilibre walrasien de cette économie.

5.2 Optima de Pareto

Soit une économie composée de deux biens (1 et 2) et de deux consommateurs (A et B). Les préférences de ces deux individus sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U^A(x_1; x_2) = x_1 x_2$$

$$U^B(x_1; x_2) = x_1 + x_2$$

Les quantités disponibles de bien 1 et 2 sont respectivement $\Omega_1 = 1$ et $\Omega_2 = 2$.

1. Représentez cette économie dans un boîte d'Edgeworth.
2. Déterminez l'ensemble des allocations optimales au sens de Pareto.

5.3 Optimum de Pareto et bien public

Soit une économie composée de deux agents (A et B) dont les préférences sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U^A\left(g;x^A\right) = 2ln(g) + ln(x^A)$$

$$U^B\left(g;x^B\right) = ln(g) + 2ln(x^B)$$

avec $g > 0$ la quantité d'un bien public pur et x^i la consommation privée de l'agent i. La production de g unités du bien public a pour coût $C(g) = g$. Le revenu total de chaque consommateur est de 15. t_i est la contribution de l'agent i au bien public.

1. Définissez en quoi consiste une allocation pour cette économie. Quel est l'ensemble des allocations réalisables ?
2. Montrez qu'en n'importe quelle allocation optimale au sens de Pareto, on a :

   $$\frac{\partial U^A/\partial g}{\partial U^A/\partial x^A} + \frac{\partial U^B/\partial g}{\partial U^B/\partial x^B} = C'(g)$$

   Utilisez cette condition de Bowen-Lindhal-Samuelson pour caractériser l'ensemble des allocation optimales au sens de Pareto. Dans cet ensemble, déterminez l'allocation telle que les deux agents contribue de la même façon à la production du bien public ($t_A = t_B$).
3. On suppose maintenant qu'il existe pour chaque agent un marché du bien public tel qu'il est ressenti par le consommateur. En fait, on suppose que la consommation du bien public par chaque agent forme un bien distinct avec son propre marché. On introduit donc un prix personnalisé p_i qui s'adresse à l'agent i. Dans cette configuration, un équilibre de Lindhal correspond a une situation dans laquelle les deux agents demande la même quantité de bien public et où la firme qui le produit maximise son profit. Déterminez cet équilibre et montrez qu'il est optimal au sens de Pareto.
4. La production du bien public est maintenant déterminée par une souscription volontaire. Chaque individu i décide librement du montant t_i de sa contribution. Quelle est l'allocation résultant de ce processus ? Est-elle optimale au sens de Pareto ?

5.4 Théorème de Stolper-Samuelson

Montrez que le théorème de Stolper-Samuelson peut être renforcé pour énoncer que l'accroissement du prix du facteur intensif est proportionnellement plus grand que l'accroissement du prix du bien (et que, dès lors, le surplus d'un consommateur qui ne possède que le facteur intensif s'accroît).

5.5 Modèle à deux biens et deux facteurs

Soient deux biens de consommation et deux facteurs de production. Les fonctions de production sont du type Cobb-Douglas :

$$f_1(z_{11}; z_{21}) = (z_{11})^{2/3}(z_{21})^{1/3}$$

$$f_2(z_{12}; z_{22}) = (z_{12})^{1/3}(z_{22})^{2/3}$$

Le vecteur des prix des biens internationaux est $p = (1; 1)$, celui des dotations totales en facteurs est $\bar{z} = (\bar{z_1}; \bar{z_2})$.

Déterminez les allocations de facteurs et les prix des facteurs à l'équilibre pour toutes les valeurs possibles de $\bar{z}$. Précisez pour quelles valeurs de $\bar{z}$ cette économie va se spécialiser complètement.

6 Analyse de bien-être et surplus du consommateur

6.1 Problème d'imposition

Soit un consommateur pouvant consommer 2 biens, notés 1 et 2, en quantités x_1 et x_2. Le vecteur de prix est $p = (p_1; p_2)$, et le revenu exogène du consommateur est w. Ses préférences sont représentées par la fonction d'utilité

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

1. Choix optimal du consommateur
   - Les préférences représentées par U sont-elles convexes ?
   - Calculer les demandes marshalliennes pour les deux biens, notées $x_1(p, w)$ et $x_2(p, w)$. Quel est l'impact d'une modification des prix et des revenus sur le comportement de consommation ?
   - Application numérique : $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $w = 6$. Quelles sont les demandes marshalliennes ? On gardera les valeurs numériques par la suite.
2. Impôt sur le revenu : Le décideur public souhaite lever des impôts, mais il hésite entre deux mécanismes.
   - Impôts indirects. Le décideur décide d'implémenter une taxe t sur le prix du bien 1 (de telle sorte qu'une somme $p_1 t$ est perçue pour chaque unité de bien 1 vendue). On suppose que $t = 1$. Comment sont affectées les demandes marshalliennes des deux biens ? Quels sont les effets à l'oeuvre ? Calculer la recette fiscale T générée par la taxe.
   - Impôts sur le revenu. A présent le décideur public souhaite obtenir les mêmes recettes fiscales T en utilisant une taxe sur le revenu. Calculer le taux τ nécessaire pour obtenir T. Calculer les demandes marshalliennes et les comparer avec la situation sans taxes. Commenter.
   - Représenter graphiquement, dans un plan (x_1, x_2), les trois cas envisagés (pas d'imposition, impôts indirects, impôts sur le revenu). Quelles seraient vos recommandations ?

6.2 Intégrabilité

Considérons un consommateur dont les fonctions de demande pour les deux biens de l'économie sont :

$$x_1(p,w) = \alpha \frac{w}{p_1}$$

$$x_2(p,w) = (1-\alpha) \frac{w}{p_2}$$

L'objectif de l'exercice est de trouver une fonction d'utilité qui engendre ces fonctions de demande.

1. Vérifier que les fonctions de demande sont homogènes, qu'elles satisfont la loi de Walras et que la matrice de Slutsky est semi-définie négative.
2. Pour trouver des fonctions d'utilité correspondant aux fonctions de demande, on procède comme suit :
   – Utiliser l'homogénéité pour normaliser w à 1 et exprimer chaque prix comme une fonction de α, $x_1(p,w)$, $x_2(p,w)$.
   – Considérer une courbe d'indifférence $U(x_1, x_2) = K$. Pour chaque K, écrire $x_2 = \phi(x_1)$. Calculer $\frac{d\phi(x_1)}{dx_1}$ et résoudre cette équation différentielle.
   – Quelle est la fonction d'utilité correspondante ?

6.3 Minimisation de la dépense et surplus du consommateur

Un consommateur a une fonction d'utilité de la forme suivante :

$$U(bx_1, x_2, ..., x_L)$$

où $b > 0$ est un paramètre représentant la “capacité à apprécier" le bien 1. L'élasticité de la demande pour le bien 1 par rapport à son prix est telle que $0 < \epsilon_{x_1,p_1} < 1$ et x_1 est un bien normal.

1. Écrire le Lagrangien du programme de minimisation de la dépense sous contrainte d'utilité constante.
2. Écrire la condition du premier ordre par rapport à x_1 seulement (ne pas éliminer le multiplicateur de Lagrange).
3. À niveau d'utilité U constant, quel est l'effet d'une augmentation de b sur la dépense ?
4. À niveau d'utilité U constant, une augmentation de b augmente-t-elle ou diminue-t-elle la demande de bien 1 ? Cela augmente-t-il le surplus que le consommateur retire du fait de pouvoir acheter x_1 au prix p_1 ?
5. À niveau d'utilité U constant, exprimer le surplus que le consommateur retire du fait de pouvoir acheter x_k au prix p_k, $k \in \{2, ..., L\}$. Une hausse de b permet-elle d'augmenter tous ces surplus simultanément ?